

Р.Дж. КАСУМОВА

$$V_{mnq} = \frac{c}{2L} \left[q + \frac{m+n}{\pi} \arccos \sqrt{g_1 g_2} \right]$$

Сборник задач с решениями
по курсу

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА



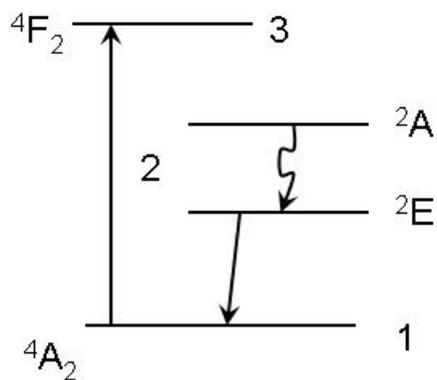
Р. Дж. КАСУМОВА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ
РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Сборник задач с решениями

по курсу

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА



Р. Дж. КАСУМОВА

Сборник задач с решениями

по курсу

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

Утверждено приказом министра Об-
разования Азербайджанской Респуб-
лики №186 от 08.02.2008 как учебное
пособие.

Баку – 2008

Научный редактор: доктор физико-математических наук, профессор **Исмайлов Т.Г.**

Рецензенты доктор физико-математических наук, профессор **Тагиев З.А.**

доктор физико-математических наук, профессор **Абдуллаев С.Г.**

кандидат физико-математических наук, доцент **Давудов Б.Б.**

Р.Дж. Касумова Сборник задач с решениями по курсу “Квантовая электроника”. Учебное пособие, Баку, Издательство Бакинского университета, 2008, -68с.

В данном учебном пособии представлены 32 задачи по спецкурсу “Квантовая электроника“ с подробным решением и краткими теоретическими сведениями по теме.

Книга предназначена для студентов физического факультета, обучающихся на степень бакалавра и магистра, специализирующихся в области лазерной и мазерной физики, физики плазмы, физики твердого тела, жидкостей и газов. А также может быть использована студентами, обучающимися на других естественных факультетах, студентами технических вузов и специалистами в вышеперечисленных областях.

Г $\frac{2302030400 - 000}{M - 658(07) - 000}$ - 2008

Издательство «Баку Университети», 2008.

ВВЕДЕНИЕ

Учебник написан, исходя из опыта преподавания автором курсов общей физики на естественных факультетах и квантовой электроники на физическом факультете Бакинского Государственного Университета.

Данное пособие разработано для студентов высших учебных заведений, специализирующихся по квантовой электронике. Решение задач, охватывающих различные темы раздела, способствует лучшему усвоению материала, развитию творческого мышления студентов. Рассмотрены примеры, охватывающие проблемы современной квантовой электроники. Темы, затронутые в приведенных задачах, представляют практически весь спектр вопросов, рассматривающих принципы и законы квантовой электроники.

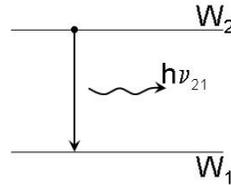
Главная цель книги – познакомить студентов с основными понятиями и методами квантовой электроники и на сознательное их применение. Уровень изложения материала требует необходимых знаний по квантовой механике и статистической физике.

Автор признателен научному редактору и рецензентам за внимательное прочтение рукописи. Сердечная благодарность сотрудникам физического факультета Бакинского Государственного Университета к.ф.-м.н. Эйвазовой Г.М. и Сафаровой Г.А. за помощь в работе над рукописью.

Все замечания и предложения будут приняты автором с вниманием и благодарностью.

ЗАДАЧИ

1. Рассмотрим в некоторой среде два энергетических уровня 1 и 2 с энергиями W_1 и W_2 соответственно, причем $W_1 < W_2$. Предположим, что атом (или молекула) вещества находится первоначально на верхнем W_2 уровне. Так как $W_2 > W_1$, то атом будет стремиться самопроизвольно перейти на первый уровень, излучая разность энергий $W_2 - W_1$.



Энергия, освобождаемая в виде электромагнитной волны, соответствует спонтанному излучению. При этом частота излучения $\nu_{21} = \frac{W_2 - W_1}{h}$ определяется соотношением Бора, h - постоянная Планка.

- 1.1 Если уровни энергии 1 и 2 разделены таким интервалом энергий $W_2 - W_1$, что частота излучения, соответствующая переходу с уровня 2 на уровень 1, приходится на середину видимого участка спектра, то каково отношение населённости этих двух уровней при комнатной температуре в состоянии термодинамического равновесия?

- 1.2 Пусть отношение населённостей N_2/N_1 двух уровней, находящихся в термодинамическом равновесии при $T = 300$ К, равно $1/e$. Вычислите частоту излучения ν , соответствующую переходу между этими уровнями, и длину волны излучения λ . В какую область электромагнитного спектра попадает излучение с такой частотой? Какому типу лазера соответствует данное излучение?

2. В 1917г. А. Эйнштейн провел классическое рассмотрение спонтанного и вынужденного испускания и поглощения электромагнитного излучения на основе термодинамических соображений. Он рассмотрел ансамбль атомов, находящихся в

термодинамическом равновесии с окружающей средой. Между уровнями ансамбля происходят квантовые переходы, соответствующие испусканию или поглощению электромагнитного излучения. При статическом равновесии излучение характеризуется спектральной плотностью $\rho(\nu)$, которая определяется формулой Планка:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}, \quad (1)$$

где $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ определяет число степеней свободы (число возможных типов колебаний или мод) в единице объёма на единицу частоты, а $\bar{\epsilon} = h\nu / (e^{kT} - 1)$ - средняя энергия на одну степень свободы, T - температура среды.

Кинетические уравнения для двух уровней, между которыми происходят переходы, имеют вид:

$$\begin{aligned} dN_2 &= -N_2 [A_{21} + \rho(\nu)B_{21}] dt + N_1 \rho(\nu) B_{12} dt, \\ dN_1 &= -N_1 \rho(\nu) B_{12} dt + N_2 [A_{21} + \rho(\nu)B_{21}] dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Индукированное излучение происходит под действием внешнего электромагнитного поля и вероятность его, очевидно, $\sim \rho(\nu)B_{21}dt$, где $B_{21} \sim$ вероятность индуцированного излучения, а $B_{12} \sim$ вероятность индуцированного поглощения для единичной плотности электромагнитного поля за единицу времени.

Аналогично происходит процесс поглощения. В этом случае вероятность пропорциональна спектральной плотности энергии вынуждающего излучения $\rho(\nu)$ на частоте перехода. Плотность энергии поля в интервале $\nu \div \nu + d\nu$ равняется $d\rho = \rho(\nu)d\nu$.

В состоянии равновесия $dN_1 = dN_2$, отсюда

$$N_2 [A_{21} + \rho(\nu)B_{21}] = N_1 \rho(\nu) B_{12}$$

и

$$\rho(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12}N_1/N_2 - B_{21}}. \quad (3)$$

Согласно распределению Больцмана, в термодинамическом равновесии

$$N_2/N_1 = (g_2/g_1) \exp\left(-\frac{W_2 - W_1}{kT}\right). \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим

$$\rho(\nu) = \frac{A_{21}}{\frac{g_1}{g_2} B_{12} \exp\left(-\frac{W_1 - W_2}{kT}\right) - B_{21}}. \quad (5)$$

2.1 Вывести связь между коэффициентами Эйнштейна A_{21} , B_{12} и B_{21} , используя формулы (1)-(5). Оценить A_{21} через B_{21} в оптическом диапазоне на длине волны $\lambda = 500$ нм.

2.2 Показать, что вероятность индуцированного излучения, отнесенная к вероятности спонтанного излучения, равна среднему числу квантов в моде. Оценить температуру T в оптическом диапазоне ($\nu = 6 \cdot 10^{14}$ Гц), соответствующую равенству вероятностей.

3. Вместо величины $\rho(\nu)$ можно ввести понятие спектральной плотности энергии ρ_λ , определяемой таким образом, что $\rho_\lambda d\lambda$ дает плотность энергии электромагнитного излучения с длинами волн в интервале $\lambda \div \lambda + d\lambda$. Найдите соотношение между ρ_λ и $\rho(\nu)$.

4. Учитывая, что $\rho(\nu)d\nu = -\rho(\lambda)d\lambda$ представьте формулу Планка в функции длины волны λ . Покажите, что формула Планка:

а) принимает вид $\rho(\lambda) = \lambda^{-5} f(1/\lambda T)$,

б) удовлетворяет закону Стефана–Больцмана $\rho = \int \rho(\lambda) d\lambda = \text{const} \cdot T^4$,

в) закону Вина $\lambda_{\text{max}} T = \text{const}$.

5. Покажите, что при низких частотах формула Планка приводится к выражению Рэлея-Джинса. Какой вид она принимает при высоких частотах?

6.** Оценить аналитически время жизни атома в возбужденном состоянии τ_{21} . Каков порядок величины $A_{21} = 1/\tau_{21}$ в оптическом диапазоне?

Считать, что двухуровневая система с частотой ν_0 аналогична осциллирующему диполю с затуханием на частоте ν_0 (классический аналог спонтанного излучения). При этом учесть, что мощность излучения колеблющегося электрона

$$P_r = \frac{n^2 \dot{d}^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}, \text{ где } d = e r_0 \text{ амплитудное значение вектора } \vec{d},$$

ϵ_0 - электрическая постоянная, c - скорость света в вакууме, n - показатель преломления среды, в которой находится диполь.

7.** Рассмотреть воздействие внешнего монохроматического поля на атомный осциллятор. Под действием этого поля атомы совершают вынужденные колебания. При этом атомы излучают. Задача является классическим аналогом индуцированного излучения. Рассчитать:

а) электрический дипольный момент атома,

б) мощность, излучаемую под действием монохроматического поля $E = E_0 \cos \omega t$,

в) рассмотреть случай, когда $\nu_0^2 \ll \nu^2$ или $\lambda_0^2 \gg \lambda^2$. Покажите, что интенсивность рассеянного света $\sim \lambda^{-4}$, где λ - длина волны падающего и рассеянного излучений. Объясните голубой цвет неба.

8*. Исходя из соотношения неопределенностей Гейзенберга между импульсом частицы и соответствующей координатой, оценить энергию основного состояния атома водорода, а также ширину уровня, соответствующего основному состоянию. При этом: $\Delta p \cdot \Delta r \sim \hbar$; $\Delta W \cdot \Delta t \sim \hbar$.

9**. Вывести зависимость ширины спектральной линии от мощности излучения, приводящую к эффекту сужения спектра генерации лазерного излучения.

10**. Получить форму линии излучения для случая естественного уширения. Вывод проводить на классической модели экспоненциально затухающего гармонического осциллятора диполя. При этом использовать преобразование Фурье, согласно которому Фурье-образ $f(t)$ выражается $g(\omega)$:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Объяснить естественное уширение с точки зрения:

- а) классической электродинамики,
- б) квантовой механики.

11. Получить форму спектральной линии для случая столкновительного уширения. Оценить вклад в однородное уширение естественного и столкновительного типов уширений. Использовать: средняя тепловая скорость атомов $\bar{v} = \sqrt{8kT/\pi M}$, средняя длина свободного пробега $\bar{\ell} = \frac{1}{4\pi a^2 n}$, где M - масса атома, a - радиус атома, n - концентрация атомов.

12. Получить форму спектральной линии для случая доплеровского уширения. Оценить вклад неоднородного уширения в ширину линии излучения лазерного перехода He-Ne лазера на длине волны 0.63 мкм. Использовать: максвелловское распределение частиц по скоростям

$$dN = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

13. Рассмотрим классическое движение магнитного момента $\vec{\mu}$ в магнитном поле \vec{H} . Как известно, уравнение движение $\vec{\mu}$ имеет вид:

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma [\vec{\mu}, \vec{H}],$$

где γ - гиромагнитное отношение, $\gamma = \frac{2\pi\vec{\mu}}{\vec{\xi}h}$, $\vec{\xi}$ - механический

момент. Перейдем во вращающую систему координат. Для произвольного вектора \vec{L} при переходе во вращающую систему координат

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{L}].$$

$\frac{d\vec{L}'}{dt}$ - скорость изменения вектора \vec{L} в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Отсюда применительно к вектору $\vec{\mu}$ получаем

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \frac{d\vec{\mu}'}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{\mu}].$$

После преобразований получаем

$$\frac{d\vec{\mu}'}{dt} = \frac{d\vec{\mu}}{dt} - [\vec{\Omega}, \vec{\mu}] = \gamma [\vec{\mu}, \vec{H}] + [\vec{\mu}, \vec{\Omega}] =$$

$$[\vec{\mu}, \gamma \vec{H}] + [\vec{\mu}, \vec{\Omega}] = \left[\vec{\mu}, \gamma \left(\vec{H} + \frac{\vec{\Omega}}{\gamma} \right) \right] = \gamma \left[\vec{\mu}, \vec{H} + \frac{\vec{\Omega}}{\gamma} \right]$$

уравнение движения $\vec{\mu}$ во вращающейся системе координат. Из сравнения полученного уравнения с уравнением в неподвижной системе координат видно, что полученное уравнение аналогично с той лишь разницей, что вместо вектора \vec{H} в полученное уравнение входит $\vec{H}_{eff} = \vec{H} + \frac{\vec{\Omega}}{\gamma}$.

В постоянном \vec{H}_o поле параллельном оси z изучим прецессию магнитного момента $\vec{\mu}$.

В неподвижной системе координат вектор \vec{H}_o имеет следующие составляющие: $H_x = 0, H_y = 0, H_z = H_o$, а вектор $\vec{\Omega} - \{\vec{i} \cdot 0, \vec{j} \cdot 0, \vec{k} \cdot \Omega\}$, т.е. вектор угловой скорости параллелен оси z .

Во вращающейся системе координат: $\vec{H}_o - \{\vec{i} \cdot 0, \vec{j} \cdot 0, \vec{k} \cdot H_o\}$, а $\vec{\Omega} - \{\vec{i} \cdot 0, \vec{j} \cdot 0, -\vec{k} \cdot \Omega\}$. Отсюда во вращающейся системе координат:

$$\vec{H}_{eff} = \vec{H} + \frac{\vec{\Omega}}{\gamma} = \vec{H}_o + \frac{\vec{\Omega}}{\gamma} = \left\{ \vec{i} \cdot 0, \vec{j} \cdot 0, \vec{k} \cdot \left(H_o - \frac{\Omega}{\gamma} \right) \right\},$$

Если выполняется условие $H_o = \frac{\Omega}{\gamma}$, то $\vec{H}_{o\,eff} = 0$. Отсюда

$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0$ и $\vec{\mu} = const..$ Таким образом, для наблюдателя во вращающейся со скоростью $\Omega = \gamma H_o = \Omega_o$ системе координат μ неподвижен. Это значит, что в постоянном \vec{H}_o вектор $\vec{\mu}$ прецессирует вокруг направления поля с угловой частотой $\Omega_o = \gamma H_o$, называемой ларморовой частотой.

13.1 Изучая движение постоянного магнитного момента $\vec{\mu}$ в постоянном \vec{H}_o , т.е. рассматривая уравнение

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma [\vec{\mu}, \vec{H}_o]$$

переходят к системе координат, вращающейся с ларморовой частотой вокруг направления поля \vec{H}_o .

В ней $\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}\right)_{rot} = 0$, т.е. $\vec{\mu} = const.$ Отсюда следует вывод, что $\vec{\mu}$ вращается с ларморовой частотой вокруг направления поля \vec{H}_o .

Получить тот же результат, не переходя к вращающейся системе координат, непосредственно решая уравнение движения для $\vec{\mu}$.

13.2** Исходя из уравнения Блоха в виде:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \gamma [\vec{J}, \vec{H}] - \vec{i} \frac{J_x}{T_2} - \vec{j} \frac{J_y}{T_2} - \vec{k} \frac{J_z - J_o}{T_1},$$

где \vec{J} - намагниченность, $T_{1,2}$ - спин-решеточная и спин-спиновая релаксации, \vec{H} - магнитное поле, M_o - равновесное значение намагниченности, получить зависимость мнимой χ'' и действительной χ' частей магнитной восприимчивости от частоты.

Примечание: при выводе использовать приближение медленного изменения внешнего поля \vec{H} . Построить кривые $\chi'(\omega)$ и $\chi''(\omega)$. Вычислить ширину линии поглощения $\Delta\omega$.

14. При ядерном магнитном резонансе имеет место взаимодействие между спиновыми состояниями протона и электромагнитным излучением. Если на вещество действует постоянное $H = 1$ Вб/м² в z направлении, то какова частота резонансного поглощения, возникающего за счет расщепления спиновых состояний протонов?

Указание: оператор спина для протона отличается от оператора спина для электрона.

- 15**.** а) Определить на каком расстоянии L от магнита следует поставить накопительную колбу, чтобы в центр отверстия колбы попадали частицы, обладающие наиболее вероятной v . Частицы – атомы водорода из пучка активных частиц в квантовом генераторе на пучке атомов водорода. Геометрия эксперимента следующая: для простоты точечный источник частиц пучка O помещен на входе магнита длиной ℓ на оси z (O – начало отсчета координаты z). Величина H в радиальном направлении меняется как $H = H_o \frac{R^2}{a^2}$. Энергия взаимодействия частиц с магнитным полем $W = -\vec{\mu}\vec{H}$, где для частиц, находящихся на верхнем рабочем уровне $|\vec{\mu}| = -|\vec{\mu}|$. Для оценок задаться следующими значениями: $\frac{|\vec{\mu}|H_o}{kT} = 10^{-3}$; $a = 0.5$ см; $\ell = 40$ см.
- б) Показать траектории частиц, находящихся на верхнем и нижнем уровнях. Как происходит сортировка частиц?
- 16.** Вычислить расстояние между центрами тяжести ядер в молекуле $\text{Na}^{23}\text{Cl}^{35}$. Известно, что в первом приближении двухатомную молекулу можно рассматривать, состоящей из двух точечных масс (масс ядер, входящих в молекулу), расстояние между которыми строго фиксировано. B – вращательная постоянная молекулы $\text{Na}^{23}\text{Cl}^{35}$ равна $B = 6.54 \cdot 10^9$ Гц, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$ г.
- 17.** В поисках среды, способной усиливать электромагнитное излучение в диапазоне миллиметровых волн, вычислялась населенность нижних чисто вращательных уровней линейной молекулы $\text{C}^{12}\text{O}^{16}$ при температуре $T = 300$ К. Её вращательная постоянная $B = 58000$ МГц, длина волны излучения, соответствующая переходам между соседними уровнями, $\lambda \approx 3$ мм. В результате расчёта выяснилось, что число частиц

на верхнем из каждой пары соседних вращательных уровней больше, чем на нижнем уровне $N_{j+1} > N_j$.

- 17.1** Казалось бы, что такая среда способна усиливать проходящее через неё излучение с $\lambda \approx 3$ мм. Так ли это?
- 17.2** Проверить также правильность утверждения $N_{j+1} > N_j$, вычислив отношение числа частиц на уровнях.
- 18.** Приписать значение отрицательной температуры системе двух энергетических уровней. Населенность верхнего и нижнего уровней соответственно 1×10^{16} см⁻³ и 0.5×10^{16} см⁻³. Кратность вырождения верхнего уровня равна 2, нижний уровень не вырожден. Возможно ли в рассматриваемой системе
- а) усиление?
б) поглощение?
- 19*.** Получить условия инверсии в трехуровневой системе в оптическом диапазоне при условиях:
- а) $h\nu \ll kT$,
б) $\tau_3 \approx 10^{-6} \div 10^{-7}$ с,
в) $\tau_2 \approx 10^{-3}$ с,
г) генерация ещё не началась, всё определяют спонтанные переходы,
д) накачка идёт на верхний уровень.
- 20.** Получить условия инверсии для четырехуровневой системы. Найти отличие в пороговых условиях от трёхуровневой системы. Объяснить разницу качественно с физической точки зрения.
- 21.** Получить условия инверсии населённостей в трёхуровневой системе в условиях радиодиапазона (велика вероятность

тепловых безизлучательных переходов, мало влияние спонтанного излучения). В системе действует внешняя накачка.

22. Оценить к.п.д.:

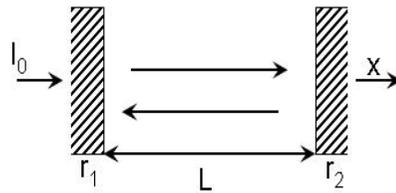
- а) молекулярного CO₂ лазера,
- б) полупроводникового инжекционного лазера с р-п переходом, например, GaAs,
- в) атомарного He-Ne лазера.

Сравнить их к.п.д. Какой из перечисленных типов лазеров имеет наибольшее к.п.д., какой наименьшее? Зная, что в случае:

- а) $E_{\text{верх.CO}_2} = 2349.16 \text{ см}^{-1}$, $E_{\text{ниж.CO}_2} = 1285.4 \text{ см}^{-1}$. Определить длину волны излучения CO₂ лазера,
- б) напряжение U , прикладываемое к р-п переходу в прямом направлении для создания инверсии, равно $U = 1 \text{ В}$,
- в) $E'_{\text{Ne}^{**}} = 20.66 \text{ эВ}$, $E_{\text{Ne}^*} = 18.704 \text{ эВ}$, $E''_{\text{Ne}^{**}} = 20.368 \text{ эВ}$, $kT_e = 7 \text{ эВ}$, $i_{\text{экспер. разр.}} = 20 \text{ мА}$, $U_{\text{разр.}} = 1 \text{ кВ}$, $P_{\text{вых.}} = (0.1 \div 0.001) \text{ Вт}$.

Определить теоретическое и экспериментальное к.п.д. He-Ne лазера.

23. Определить пороговое условие генерации и зависимость порогового коэффициента усиления в лазере, если $r_{1,2}$ - коэффициенты отражения зеркал, L - длина резонатора, α, β - коэффициенты усиления и потерь в среде.



24. Определить пороговую мощность накачки лампы-вспышки, необходимую для накачки твердотельного лазера. Число активных частиц в кристалле $n = 1 \cdot 10^{19} \text{ част./см}^3$, объём кристалла $V = 10 \text{ см}^3$. Время жизни на верхнем рабочем уровне $\tau_{cn} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. Середина полосы, в которую происходит основное поглощение излучения источника накачки, соответ-

ствует частоте $\nu = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$. Принять к.п.д. лампы накачки равным 100%.

25. Зеркала резонатора с $r_1 = 1$, $r_2 = 0.9$ нанесены прямо на торцы стержня активного вещества длиной $L = 10 \text{ см}$. Потерями в стержне активного вещества и на зеркалах (за исключением потерь на излучение) пренебречь.

Определить величину коэффициента квантового усиления активной среды, необходимую для возникновения генерации в лазере, а также L_{min} , которую может иметь рубиновый лазер с такими зеркалами, если в рубине создана полная инверсия (коэффициент усиления равен 0.3 см^{-1}).

26. Оценить пороговую мощность накачки рубинового лазера. Потерями пренебречь. Длина стержня $L = 10 \text{ см}$, сечение стержня $\pi d^2 / 4 = 1 \text{ см}^2$. Пороговая мощность накачки будет определяться только потерями на излучение в зеркалах, где $r_1 = 1$, $r_2 = 0.6$. Параметры рубина: концентрация ионов Cr^{3+} равняется $n = 1.6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, распределение частиц по уровням (например, при $T = 290 \text{ К}$ концентрация ионов на уровне 2E равняется $n_{2E} = 0.466 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $n_{2A} = 0.405 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $n_{4A_2} = 0.73 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$), $h\nu_{R_1} \approx 2.9 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 2.9 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, $h\nu_{4A_2 \rightarrow 4F_2} = 4.2 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 4.2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, $A_{21} = 300 \text{ с}^{-1}$, к.п.д. равен 1, вырождение уровней $g_{2E} = 2$, $g_{4A_2} = 4$.

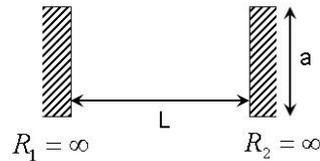
27. Определить пороговую населенность $N_{2,nop.}$ верхнего рабочего уровня (2E) рубинового лазера и минимальную энергию накачки рубинового лазера.

28**. Рассчитать добротность резонатора Q и время жизни фотона τ_r в резонаторе Фабри-Перо с плоскими зеркалами. Расстояние между зеркалами $L = 1 \text{ м}$. В резонаторе возбуж-

дается основной тип колебаний TEM_{00q} , образуемый двумя бегущими навстречу друг другу плоскими волнами ($\lambda = 0.6$ мкм). Среда, заполняющая резонатор, слабо поглощающая (коэффициент поглощения $\beta = 0.001$ см⁻¹). $r_1 = r_2 = 95\%$. Размеры зеркал много больше, чем диаметр луча, по этой причине дифракционными потерями можно пренебречь.

29. При следующих параметрах оптического резонатора: $R_1 = \infty$, $R_2 = 100$ см, $L = 50$ см
- оценить разницу между частотами 1-го порядка поперечного типа колебания TEM_{01} и основного типа TEM_{00} для пустого резонатора,
 - определить тип резонатора,
 - каково распределение поля внутри резонатора?

30. Определить дифракционные потери для основной моды TEM_{00} и для поперечной моды TEM_{01} в резонаторе с плоскими зеркалами круглой формы. $L = 100$ см, $\lambda = 0.63$ мкм, апертурный размер зеркал равен 0.5 см. Считать, что корни функции Бесселя: $\lambda_0^{(1)} \approx 2.40$; $\lambda_1^{(1)} \approx 3.83$.



Какому участку g-диаграммы соответствует такой резонатор?

- 31*. Определить оптимальный коэффициент пропускания зеркал T_{opt} ($r_1 = r_2$) резонатора лазера, позволяющий получить максимальную выходную мощность. Коэффициент ненасыщенного усиления за проход α_0 , коэффициент потерь за проход β . Дифракционными потерями пренебречь. Параметры резонатора: $L = 10$ см, $\alpha_0 = 0.1$ см⁻¹, $\beta = 0.01$ см⁻¹. Учтите, что активная среда заполняет весь резонатор.

32. Оценить угол расхождения пучка основного типа колебания конфокального резонатора. Для счета принять: $\lambda = 1$ мкм, $L = R_1 = -R_2 = 2$ м. При этом апертурный размер зеркал велик и дифракционные эффекты малы.

РЕШЕНИЯ

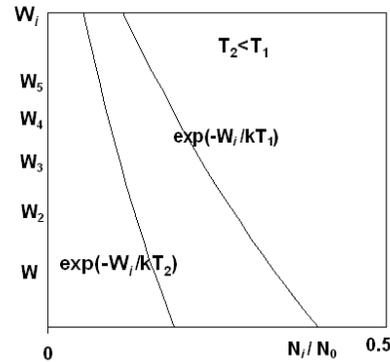
1.1 Согласно распределению Больцмана в условиях теплового равновесия между веществом и средой имеет место следующее соотношение

$$N_i = \frac{N_0 g_i \exp(-W_i / kT)}{\sum_i g_i \exp(-W_i / kT)},$$

где i обозначает номер энергетического уровня (см. рис.). Распишем N_i , например, для первого уровня:

$$N_1 = \frac{N_0 g_1 \exp(-W_1 / kT)}{\sum_i g_i \exp(-W_i / kT)}.$$

Из рисунка видно, что населённости уровней уменьшаются с возрастанием энергии уровня. С увеличением температуры населённости верхних уровней растут, но всё же остаются меньше населённостей нижних уровней (сравнить кривые на рис.).



Отношение населённостей двух уровней будет равно:

$$N_2 / N_1 = \exp[-(W_2 - W_1) / kT].$$

Так как

$$\Delta W_{21} = W_2 - W_1 = h\nu,$$

найдем $N_2 / N_1 = \exp(-h\nu / kT) \approx \exp(-100) \ll 1$, т.е. $N_2 \ll N_1$.

Вывод: В равновесном состоянии нижние уровни всегда заселены больше, чем верхние. Поэтому обычно вещество не усиливает, а поглощает излучение. Чтобы сделать вещество усиливающим надо нарушить его тепловое равновесие так, чтобы хотя бы для одной пары уровней выполнялось условие $N_2 > N_1$.

1.2 $N_2 / N_1 = \exp[-(W_2 - W_1) / kT] = \exp(-\frac{h\nu}{kT}) = e^{-1}$, $\nu = kT / h =$

$= 0.77 \cdot 10^{13}$ Гц. $\lambda = c / \nu = 3.9 \cdot 10^{-3}$ см \square 40 мкм, что относится к области субмиллиметровых волн. Для справки: излучение CO₂ лазера происходит на $\lambda = 10.6$ мкм, пары H₂O излучают на 118 мкм, а молекулы НВг на 30 мкм.

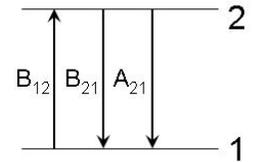
Вывод: В лазерах обычно $W_2 - W_1 \square kT$ и в соответствии со статистикой Больцмана почти все атомы при термодинамическом равновесии находятся в основном состоянии. Для оптического генератора на стекле неодима $\Delta W_{21} \square kT$ при $T \leq 500$ К, поэтому эти лазеры работают при комнатной температуре и не требуют охлаждения до низких температур.

2.1. Согласно Планку

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}, \quad (1)$$

согласно Эйнштейну

$$\rho(\nu) = \frac{A_{21}}{\frac{g_1}{g_2} B_{12} \exp\left(-\frac{W_1 - W_2}{kT}\right) - B_{21}}. \quad (2)$$



Поскольку при $T \rightarrow \infty$ согласно (1) $\rho(\nu)$ должно неограниченно расти, то, полагая знаменатель выражения (2) равным нулю, получаем

$$B_{12} \frac{g_1}{g_2} \exp\left(-\frac{W_1 - W_2}{kT}\right) = B_{21}.$$

Откуда, так как при этом

$$\exp\left(-\frac{W_1 - W_2}{kT}\right) = 1,$$

то получаем

$$B_{12} \frac{g_1}{g_2} = B_{21}.$$

Сопоставляя выражения (1) и (2), получаем:

$$A_{21} / B_{21} = 8\pi\nu^3 h / c^3.$$

Отсюда

$$B_{21} = c^3 A_{21} / 8\pi h \nu^3, \text{ а } A_{21} = 8\pi h \nu^3 B_{21} / c^3 = 1.66 \cdot 10^{-15} B_{21}.$$

Несмотря на такое соотношение в оптическом диапазоне спонтанные переходы преобладают над вынужденными, так как при $T = 300 \text{ K}$ спектральная плотность энергии $\rho(\nu)$ невелика, а вероятность индуцированного перехода $\sim \rho(\nu) B_{21} dt$. Отсюда для $h\nu / kT = 100$, $\rho(\nu) B_{21} / A_{21} = \rho(\nu) / 10^{-15} = e^{-100} \approx 10^{-7}$.

2.2 $A_{21} = 8\pi h \nu^3 B_{21} / c^3$ (см. предыдущую задачу). Отсюда $A_{21} / B_{21} = (8\pi \nu^2 / c^3) h \nu$. Согласно формуле Планка

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Из сравнения имеем: $A_{21} / [\rho(\nu) B_{21}] = e^{h\nu/kT} - 1$. Вероятности обоих переходов одинаковы, т.е. $A_{21} = \rho(\nu) B_{21}$ в оптическом диапазоне приблизительно при $T \sim 10^4 \text{ K}$.

Оценим температуру более точно: из соотношения $h\nu / kT \approx \ln 2$, получаем $T \approx 28 \cdot 10^3 / \ln 2$.

Таким образом, при $T = 28000 \text{ K}$ вероятности одинаковы.

С другой стороны это условие соответствует

$$A_{21} / [\rho(\nu) B_{21}] = e^{h\nu/kT} - 1.$$

Здесь $\bar{\epsilon} / h\nu = \bar{n}$, где $\bar{\epsilon} = h\nu / (e^{h\nu/kT} - 1)$ - средняя энергия излучения на одну (моду) степень свободы, а \bar{n} - среднее число квантов в одной моде. В случае равенства вероятностей, т.е. $A_{21} = \rho(\nu) B_{21}$, $\bar{n} = 1$, т.е. данное равенство вероятностей - это условие существования одного кванта энергии в каждой моде.

3. Согласно определению $\rho(\nu)$ - спектральная плотность энергии, излучаемой в частотном интервале $d\nu$, а $d\lambda$ - интервал длин волн, соответствующий $d\nu$. Поскольку $\lambda\nu = c$, то $\nu d\lambda + \lambda d\nu = 0$, т.е. $\rho(\nu) d\nu = -\rho(\nu) \frac{\nu d\lambda}{\lambda} = -\rho(\nu) \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = -\rho(\lambda) d\lambda$.

$$\text{Таким образом, } \rho(\nu) = \frac{\lambda^2}{c} \rho(\lambda) \text{ или } \rho(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2} \rho(\nu).$$

$$\begin{aligned} \text{4. а) } \rho(\lambda, T) &= \frac{\nu}{\lambda} \rho(\nu) = \frac{\nu}{\lambda} \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \\ &= \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} = \lambda^{-5} \cdot f(1/\lambda T). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \rho &= \int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \sim T^4, \quad \text{где } x = hc / kT\lambda, \\ dx &= -hcd\lambda / kt\lambda^2. \end{aligned}$$

Отсюда получили закон Стефана-Больцмана, утверждающий, что полная объемная плотность энергии $\sim T^4$.

в) Максимальное значение $\rho(\lambda, T)$ при данной T находится при том λ_{\max} , для которого знаменатель выражения $\rho(\lambda, T)$ равен

\min , т.е. $\lambda^5 (e^{hc/kT\lambda} - 1) = \min$. Обозначим $hc/kT\lambda = a$, тогда знаменатель равен $a(e^x - 1)/x^5 = \min$. Экстремум этого выражения по x определяется при $x = hc/kT\lambda_{\max} = \text{const}$. Отсюда получаем известное выражение для закона смещения Вина - $\lambda_{\max} T = \text{const}$, который гласит, что максимум энергии в спектре равновесного излучения приходится на λ_{\max} , которая обратно пропорциональна температуре излучающего тела.

5. В формуле Планка

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

для низких частот $h\nu \ll kT$ экспоненту можно разложить в ряд и ограничиться первыми двумя членами, что дает:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{1 + h\nu/kT - 1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT.$$

Полученная формула отражает закон Рэлея-Джинса, который согласуется с экспериментом при малых ν (в длинноволновой области спектра). С ростом частоты энергии согласно закону, должна расти, достигая больших значений в далёкой УФ области (ультрафиолетовая катастрофа). Закон был выведен из классических представлений о равномерном распределении энергии по степеням свободы.

Для высоких частот $h\nu \gg kT$ формула Планка принимает вид

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT},$$

что выражает закон Вина.

6. Проведём полуклассическое рассмотрение явления спонтанного излучения. В таком рассмотрении используется аналогия между атомной системой, имеющей два уровня с частотой пере-

хода между ними ν_0 , и классическим электрическим диполем, который также осциллирует на той же самой частоте ν_0 (экспоненциально затухая). С чисто классической точки зрения рассмотрим атомную модель, в которой электрон с массой m_e и зарядом e , упруго связанный с атомом, колеблется около своего положения равновесия с собственной частотой ν_0 , т.е. имеем дело с осциллирующим диполем (системой из двух разноименных зарядов, один из которых колеблется около другого с собственной частотой ν_0). Здесь $h\nu_0 = W$. Такой осциллятор обладает электрическим дипольным моментом. Если считать положительный заряд фиксированным, то в системе координат, связанной с этим зарядом, координату отрицательного заряда можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\nu_0 t + \varphi),$$

а дипольный момент $\vec{d} = e\vec{r}$. Уравнение движения атома около положения равновесия имеет вид:

$$m_e \ddot{r} = -kr - \gamma' \dot{r},$$

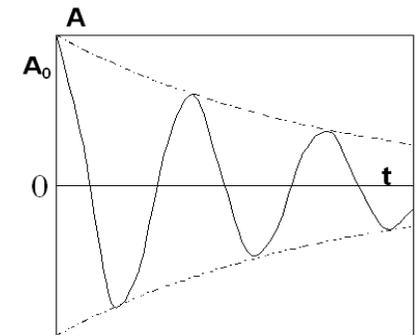
где k - квазиупругая постоянная, γ' - коэффициент трения.

$$\ddot{r} = -\frac{k}{m_e} r - \gamma' \frac{\dot{r}}{m_e}, \quad k/m_e = \nu_0^2, \quad \gamma'/m_e = \gamma,$$

$$\ddot{d} = e\ddot{r} = e\nu_0^2 r = \nu_0^2 d,$$

$$\ddot{r} = -\nu_0^2 r.$$

Уравнение гармонического осциллятора обычно записывают в виде:



$$\ddot{r} + \nu_0^2 r + \gamma \dot{r} = 0.$$

Решение уравнения имеет вид:

$$r = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \delta).$$

Поскольку W - энергия осциллятора $\sim A^2$, то $W = W_0 e^{-\gamma t} = W_0 e^{-t/\tau}$. Энергия осциллятора затухает экспоненциально с характерным временем τ . Движение осциллятора не чисто синусоидально, а скорее синусоидальное с экспоненциальным затуханием (см. рис.). Из уравнений Максвелла следует, что электрический заряд, движущийся с ускорением, должен излучать электромагнитную волну с интенсивностью \sim квадрату ускорения. Мощность излучения электрона во время колебательного его движения

$$P_r = \frac{n \ddot{d}^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{nd^2 \omega_0^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Здесь d - амплитудное значение, $d = er_0$, n - показатель преломления среды, где находится диполь, c - скорость света в вакууме. Среднее значение полной энергии W осциллирующего электрона определяется следующим образом:

$$\langle W \rangle = \left\langle \frac{m_e v_e^2}{2} \right\rangle + \langle \text{потенциальная энергия} \rangle.$$

Потенциальная энергия

$$U(r) = kr^2/2 = m_e \omega_0^2 r^2/2 = m_e \nu_e^2/2.$$

Так как эти значения равны, имеем

$$\langle W \rangle = 2 \left\langle \frac{m_e \nu_e^2}{2} \right\rangle = \langle m_e \nu_e^2 \rangle = m_e \langle \nu_e^2 \rangle = m_e \nu_e^2/2,$$

где $\dot{r} = v = -\omega_0 r = -\omega_0 d/e$.

Отсюда

$$\langle W \rangle = m_e \nu_e^2/2 = m_e (\omega_0 d/e)^2.$$

За время dt осциллятор теряет энергию $dW = -Wdt/\tau$ ($W = W_0 \exp(-t/\tau)$). Тогда получаем $W/\tau = P_r$ или

$$\tau = W/P_r = \frac{\frac{m_e}{2} (\omega_0 d/e)^2}{nd^2 \omega_0^4 / 12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{6m_e \pi \epsilon_0 c^3}{\omega_0^2 e^2 n}.$$

Поскольку диполь излучает, то амплитуда r_0 колебаний и, следовательно, амплитуда дипольного момента d будет со временем уменьшаться (см. график). Но величина τ остается const, так как не зависит от d . Следовательно W уменьшается с постоянной τ , т.е. это время жизни осциллирующего диполя. Отсюда, согласно проводимой аналогии $\tau = \tau_{cn}$.

Строгое квантомеханическое рассмотрение даёт следующее выражение

$$\tau_{cn} = \frac{3\pi h \epsilon_0 c^3}{2\pi \omega_0^3 n |d|^2}.$$

Сравнение обоих выражений даёт:

$$\tau/\tau_{cn} = 2m\omega_0 |d|^2 / (e^2 h / 2\pi).$$

Оценка этого отношения при $|d| = ea$, где a - атомный радиус $\sim 10^{-8}$ см, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ даёт: $\tau/\tau_{cn} \approx 1$.

Таким образом, для количественных оценок τ_{cn} можно использовать вывод, полученный из классического рассмотрения. Для

$$\tau = \frac{6m_e \pi \epsilon_0 c^3}{\omega_0^2 e^2 n},$$

где m_e - масса электрона, e - заряд электрона, $n \sim 1$, получается $\tau \sim (10^{-7} \div 10^{-8})c$. Тогда $A \sim (10^7 \div 10^8)c^{-1}$ - вероятность разрешённых электрических дипольных переходов.

Для магнитных дипольных переходов A в 10^5 раз меньше, т.е. $\sim 10^3 c^{-1}$.

Из выражения τ_{cn} видна квантомеханическая природа спонтанного излучения. $A = 1/\tau_{cn} \sim |d|^2$. Вероятность перехода определяется дипольным матричным элементом перехода. Если матричный элемент дипольного момента мал, то переход запрещён и наоборот.

Проводя опять аналогию можно сказать, что оптические свойства квантового перехода $i \rightarrow k$ совпадают во многом с оптическими свойствами соответствующего осциллятора. Количественно результаты совпадают, если считать, что амплитуда дипольного момента определяется через законы квантовой механики, т.е.

$$\langle d_{ik} \rangle = e \int r \psi_i \psi_k^* dV,$$

так как $\psi_j \sim \exp(i2\pi W_j t / h)$, то $\psi_i \psi_k^*$ не зависит от t .

7. Под влиянием внешней вынуждающей силы $E = E_m \sin \omega t$ уравнение осциллятора имеет вид:

$$\dot{r} + m \ddot{r} + m \omega_0^2 r = F_{внеш} = e E_m \sin \omega t.$$

Так как напряженность электрического поля имеет синусоидальный характер, запишем E в комплексной форме $E_m e^{i\omega t}$, а r заменим на $r = r_m e^{i\varphi + i\omega t}$, причём r изменяется с частотой вынуждающего поля, где φ фаза собственных колебаний. Перепишем уравнение в виде:

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r + \gamma \dot{r} = F_{внеш} = e E_m \sin \omega t / m$$

$$r_m = -e E_m / m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega),$$

где $\ddot{d} = \omega^2 d$.

Отсюда:

а) индуцированный электрический дипольный момент имеет комплексную амплитуду:

$$d_m = -er_m = \frac{e^2 E_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)},$$

модуль которой равен:

$$d_m = e^2 E_m / m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

б) Мощность, излучаемая

$$P_r = \frac{nd^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{n\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^4 E_m^2}{m^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}.$$

в) Если $\omega_0^2 \square \omega^2$, т.е. частота собственных колебаний больше частоты вынуждающей силы, то

$$P_r = \frac{n\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^4 E_m^2}{m^2 \omega_0^4} \sim \omega^4 \sim \lambda^{-4}.$$

Модель рассеяния – падающее монохроматическое излучение рассеивается на осциллирующем атоме, причём частота падающего поля и рассеянного одинаковы при $\omega_0^2 \square \omega^2$.

Отношение интенсивностей рассеяния голубого и красного цвета будет равно $\sim (\lambda_{кр} / \lambda_{зол})^4 = 9.38$. Интенсивность рассеяния голубого цвета в 10 раз больше, чем красного, т.е. в рассеивающем потоке голубая компонента в 10 раз насыщеннее красной, что и определяет цвет неба.

8. Пусть r - расстояние между электроном $-e$ и ядром e . Энергия электрона W на расстоянии r ($r \square d$) складывается из кинетической энергии и потенциальной. Последняя равна энергии кулоновского взаимодействия между точечными телами. Энер-

гия притяжения ядра $U = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r$. Отсюда $W = p^2 / 2m_e - e^2 / 4\pi\epsilon_0 r$. W_{\min} получается при наименьших p и r . Но значения возможных p и r ограничены снизу соотношением неопределённостей:

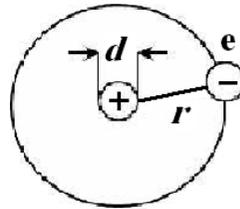
$$\Delta p \cdot \Delta r \approx \hbar.$$

Таким образом, средние $\langle r \rangle$ и $\langle p \rangle$ не могут быть меньше, чем Δr и Δp соответственно. Отсюда для минимальных средних значений имеем $\langle r \rangle_{\min} = \Delta r$, $\langle p \rangle_{\min} = \Delta p$. Перепишем соотношение неопределённостей и W через средние значения

$$\langle p \rangle \cdot \langle r \rangle \approx \hbar$$

и

$$\langle W \rangle = \frac{\hbar^2}{2m_e \langle r^2 \rangle} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \langle r \rangle}.$$



Из уравнения $\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial \langle r_{\min} \rangle} = 0$ определим $\langle r_{\min} \rangle = \epsilon_0 \hbar^2 / \pi m_e e^2$, что

соответствует радиусу первой боровской орбиты или наиболее вероятному расстоянию r электрона от ядра.

Энергия основного состояния атома водорода равна

$$W_0 = \langle W_{\min} \rangle = W(\langle r_{\min} \rangle) = -m_e e^4 / 8\epsilon_0^2 \hbar^2.$$

Определим ширину этого уровня. Из принципа неопределённости

$\Delta W_0 \approx \hbar / \tau$, где $\tau = \Delta t$ - время жизни частицы на этом уровне.

Поскольку основной уровень W_0 соответствует наименьшей возможной энергии, т.е. наиболее устойчивому положению системы (атома), то его τ равно бесконечности. Отсюда ширина основного уровня $\Delta W_0 = 0$.

9. При анализе процесса взаимодействия предполагалось, что ширина энергетических уровней равна нулю и усиление происходит только на частоте перехода ν_{21} . Так как $\frac{dW}{dt}$ пропорционально усилению, то для результирующей мощности излучения было получено:

$$\frac{dW}{dt} \sim h\nu_{21} (N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1) B_{21} \rho(\nu).$$

Учёт ширины уровней ведёт к конечной ширине спектральной линии – зависимости мощности излучения (поглощения) от частоты. Для квантовой механики спектральная линия описывает зависимость коэффициента усиления вещества от частоты и характеризует полосу усиливаемых частот.

Используемые до сих пор A_{21} , B_{21} и B_{12} описывали вероятность переходов микрочастиц для перехода в целом, поэтому они по своему смыслу интегральные коэффициенты. Если же рассматривать частотное распределение, то правильнее использовать спектральные коэффициенты $A_{21}(\nu)$, $B_{21}(\nu)$ и $B_{12}(\nu)$. Связь между ними такая:

$$A_{21} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{21}(\nu) d\nu,$$

$$B_{21} = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{21}(\nu) d\nu,$$

$$B_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{12}(\nu) d\nu.$$

Соотношения, выведенные выше, справедливы для обоих типов коэффициентов. Для определения энергетического эффекта взаимодействия электромагнитного поля и вещества с учётом ширины спектральной линии надо проинтегрировать спектральные мощности индуцированного излучения и поглощения. Мощ-

ность, излучаемая или отдаваемая веществом электромагнитному полю, будет равна

$$P = \int \frac{dW}{dt} = hv_{21} \int_{-\infty}^{\infty} \left[B_{21}(\nu)\rho(\nu)N_2 - \frac{g_2}{g_1} B_{21}(\nu)\rho(\nu)N_1 \right] d\nu =$$

$$= hv_{21} \int_{-\infty}^{\infty} B_{21}(\nu)\rho(\nu) d\nu \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right)$$

Ширина полосы частот колебаний, усиливаемых или генерируемых $\Delta\nu_{21}$, обычно меньше ширины соответствующей спектральной линии $\Delta\nu$. Поэтому можно приближенно полагать, что $B_{21}(\nu) = const.$ и равным $B_{21}(\nu_{21})$, где ν_{21} - центр линии. Тогда мощность взаимодействия

$$P = \int \frac{dW}{dt} = hv_{21} \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) B_{21}(\nu)\rho,$$

где ρ - полная плотность энергии электромагнитного поля и по определению равняется $\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\nu) d\nu$.

Выразим $B_{21}(\nu_{21})$ через B_{21} , так как экспериментально определяются интегральные коэффициенты Эйнштейна.

$$B_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} B_{21}(\nu) d\nu \approx B_{21}(\nu_{21}) \Delta\nu_{21}.$$

Отсюда для мощности получаем

$$P = hv_{21} \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) B_{21} \rho / \Delta\nu_{21},$$

где $B_{21}\rho/\Delta\nu_{21}$ -вероятность индуцированного перехода в единицу времени.

Таким образом, мощность взаимодействия $\sim 1/\Delta\nu_{21}$. В процессе усиления электромагнитного излучения в инверсной среде происходит изменение его спектрального состава, т.е. меняется форма линии излучения. При первом прохождении среды излучение, представляющее набор частот $\Delta\nu'$, уменьшает инверсию на ΔN , т.е. “снимает” частицы с верхнего уровня в некотором частотном интервале. Наибольшее усиление получает излучение на частоте ν_{21} , совпадающей с максимумом спектральной линии. Остальные частоты получают меньшее усиление в зависимости от того, насколько они удалены от центра линии. При втором, третьем и т. д. проходах усиливающей среды происходит дальнейшее уменьшение интервала частот, которые усиливаются ($\Delta\nu''$, $\Delta\nu'''$, ...). В результате наблюдается монокроматизация излучения лазера.

10. Как известно, естественное уширение линии связано с конечным временем жизни атома в возбуждённом состоянии τ_{21} . По определению $\tau_{21} = 1/A_{21}$. Естественная ширина непосредственно определяется вероятностью спонтанного излучения. Рассмотрим спонтанное излучение изолированной частицы и покажем, что оно распределено в некотором частотном интервале, другими словами рассмотрим процесс естественного уширения.

Контур естественной линии можно определить методами квантовой механики. Но получающиеся результаты совпадают с результатами, которые даёт рассмотрение классического осциллирующего диполя. Известное решение уравнения классического диполя запишем в виде

$$x = A \exp(-\gamma t/2) \exp(i\nu_1 t),$$

где $\nu_1^2 = \nu_0^2 - (\gamma/2)^2$, A - произвольная амплитуда колебаний. Интенсивность колебаний $\sim A^2$ и за время $\tau = 1/\gamma$ падает до

величины I_0/e (I_0 -начальное значение интенсивности). С точки зрения квантовой механики τ - среднее время жизни возбуждённого состояния.

Найдём диапазон частот, излучаемых классическим осциллятором в процессе затухания для $t > 0$. Выпишем формулы Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

и

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Полагая $f(t) = \dot{x} = A \exp(-\gamma t/2) \exp(i\omega_1 t)$, имеем:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A \exp(-\gamma t/2) \exp(i\omega_1 t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t/2 + i(\omega_1 - \omega)t} dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \right) \end{aligned}$$

Из равенства нулю первого интеграла получаем:

$$g(\omega) = -\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega_1 - \omega + i\gamma/2)} = \frac{iA}{\sqrt{2\pi}(\omega_1 - \omega + i\gamma/2)}.$$

Полученное выражение определяет амплитуду колебаний. Распределение интенсивности как функция частоты даётся формулой $I = g(\omega)g^*(\omega)$:

$$I = \frac{A^2}{2\pi \left[(\omega_1 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right]}.$$

Полученное выражение даёт симметричный контур. Такая форма контура спектральной линии называется естественной или лоренцевой.

Вывод: а) С точки зрения классической электродинамики естественная ширина линии объясняется затуханием (γ) движения изолированного осциллятора (модель излучателя) за счёт силы лучистого трения (лоренцевой силы трения), где сила обусловлена излучением заряда при его движении с ускорением.

б) С точки зрения квантовой механики данная ширина определяется τ_{21} (см. начало задачи).

11. В реальных условиях атом не изолирован в среде, он взаимодействует с окружающими его частицами. Взаимодействие в газах - это столкновения атомов с соседними атомами, ионами, свободными электронами и т.д. В твердых телах - это взаимодействие электрона с кристаллической решёткой, в узлах которой расположены колеблющиеся около положения равновесия атомы или ионы. Воздействие других частиц ведёт к уменьшению времени жизни эквивалентного осциллятора, а форма спектральной линии при этом остаётся такой же, что и в случае изолированного атома, только ширина $\Delta\nu = \gamma$ увеличивается. Так

как $\gamma' = \frac{1}{\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_{cm}}$, где τ - время свободного пробега между соударениями, то

$$I(\nu) = \frac{I_{\max} \gamma' / 4}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma'^2 / 4}.$$

Таким образом, учёт соударений ведёт к уширению линии. Столкновительная и естественная ширина линии составляют однородную ширину линии. Оценим порядок столкновительной ширины

$$\gamma_{cm} = 1/\tau_{cm},$$

где $\tau_{cm} = \bar{\ell} / \bar{v}$, $\bar{\ell}$ средняя длина свободного пробега, \bar{v} средняя тепловая скорость атомов. В разреженном газе, при низких давлениях, молекулы рассматриваются как упругие шарики диаметром, равным эффективному сечению σ , причём взаимодействуют они только в момент соударения. В этом приближении

$$\bar{\ell} = 1 / \pi \sigma^2 n = kT / 4\pi a^2 p,$$

где n -концентрация молекул, $p = nkT$, a -расстояние между атомами $\sim 10^{-8}$ см. Отсюда

$$\tau_{cm} = \sqrt{\pi M / 8kT} \cdot kT / 4\pi a^2 p = \sqrt{MkT / 2\pi} \cdot (8pa^2)^{-1}$$

Оценки для атомов Ne при $p = 0.5$ мм рт.ст. и $T = 300$ К дают величину $\tau_{cm} \approx 0.5 \cdot 10^{-6}$ с. Отсюда $\Delta\nu_{cm} \sim 2$ МГц. Поскольку $\tau_{cm} \sim 1/p$, то $\Delta\nu_{cm} \sim p$. Обычно $\Delta\nu_{cm} \sim (2 \div 30)$ МГц/торр.

Столкновение нарушает процесс когерентного взаимодействия атома с падающей электромагнитной волной. Из-за столкновений уширяется линия каждого отдельного атома, отсюда и всей системы в целом в одинаковой степени.

12. Рассмотрим газ, неподвижные атомы (молекулы, ионы) которого излучают или поглощают на частотах, лежащих внутри очень узкой полосы с максимумом на ν_0 . Для движущихся атомов эти частоты сдвигаются из-за эффекта Доплера. При этом важны направления скорости v атомов, направленные вдоль линии наблюдения. Пусть составляющая v атомов вдоль этой линии v . Наблюдаемая частота $\nu = \nu_0(1 \pm \frac{v}{c})$, где $v = \frac{v - v_0}{c}$.

Знак плюс соответствует приближающимся атомам, минус – удаляющимся.

$$d\nu = \nu_0 \frac{dv}{c}, \quad dv = cdv / \nu_0.$$

Согласно максвелловскому распределению по скоростям

$$dN = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot dv.$$

Вероятность того, что частота, излучаемая в направлении v , лежит в интервале $\nu \div \nu + d\nu$ будет

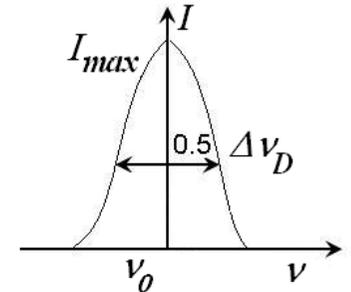
$$dN = \frac{c}{\nu_0} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{m(v-v_0)^2}{2kT} \frac{c^2}{\nu_0^2}} \cdot d\nu$$

Это есть доля от общего числа атомов, которая излучает или поглощает в направлении наблюдения. Так как интенсивность \sim числу излучающих частиц, то следует, что

$$I(\nu) = I_0 e^{-\frac{m(v-v_0)^2}{2kT} \frac{c^2}{\nu_0^2}} = I_{\max} e^{-\frac{m(v-v_0)^2}{2kT} \frac{c^2}{\nu_0^2}},$$

где I_0 -интенсивность при $\nu = \nu_0$, $I = I_{\max} = I_0$.

Такая форма спектральной линии описывается функцией Гаусса и называется доплеровской линией. Ширина линии $\Delta\nu_D$ -это частотный интервал, на концах которого интенсивность равна $I_{\max} / 2$.



$$\ln I / I_{\max} = \ln 2 = -\frac{m}{2kT} \frac{(v-v_0)^2}{\nu_0^2} c^2.$$

В результате получаем

$$\Delta\nu_D = 2\nu_0 \sqrt{\frac{2kT}{mc^2} \ln 2},$$

которая определяется через температуру газа и массу движущихся

частиц. Оценим $\Delta\nu_D$ для He-Ne лазера на $\lambda = 0.63$ мкм, $m_{Ne} = 10^{-24}$ г. Для $\Delta\nu_D$ получается $\Delta\nu_D = 8 \cdot 10^3$ МГц.

Коэффициент усиления $\alpha(\nu) \sim$ доле атомов

$$\alpha(v) = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\Delta v_D} e^{-4\ln 2 \left(\frac{v-v_0}{\Delta v_D}\right)^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{I} \frac{dI}{dx} = +\alpha(v) = v_0 e^{-4\ln 2 \left(\frac{v-v_0}{\Delta v_D}\right)^2} \approx v_0 e^{-\left(\frac{v-v_0}{0.6\Delta v_D}\right)^2}$$

13.1. Пусть \vec{H}_0 параллелен оси oz . Из уравнения

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma[\vec{\mu}, H_0]$$

имеем:

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_x = \frac{d\mu_x}{dt} = \gamma\mu_y H_0 \sin(\mu_y \wedge H_0) = \gamma\mu_y H_0, \quad \sin(\mu_y \wedge H_0) = 1,$$

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_y = \frac{d\mu_y}{dt} = \gamma\mu_x H_0 \sin(\mu_x \wedge H_0) = -\gamma\mu_x H_0, \quad \sin(\mu_x \wedge H_0) = -1,$$

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_z = \frac{d\mu_z}{dt} = \gamma\mu_z H_0 \cdot \sin \mu_z \wedge H_0 = 0, \quad \sin \mu_z \wedge H_0 = 0.$$

Обозначим $\nu_0 = \gamma H_0$. Тогда

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_x = \nu_0 \mu_y, \quad \left(\frac{d\mu}{dt}\right)_y = -\nu_0 \mu_x$$

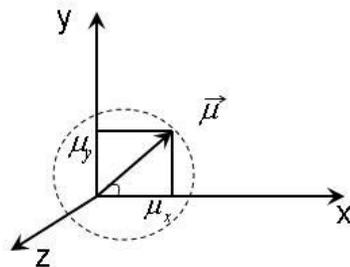
Отсюда

$$\frac{d^2 \mu_x}{dt^2} + \nu_0^2 \mu_x = 0$$

Решение ищем в виде:

$$\mu_x = c_1 \cos \nu_0 t + c_2 \sin \nu_0 t,$$

37



откуда

$$\mu_y = \frac{1}{\nu_0} \frac{d\mu_x}{dt} = c_2 \cos \nu_0 t - c_1 \sin \nu_0 t.$$

Из выражений μ_x, μ_y видно, что данные компоненты вектора постоянного $\vec{\mu}$ вращаются вокруг направления поля \vec{H}_0 с частотой $\nu_0 = \gamma H_0$ (ларморовой частотой). Конец вектора $\vec{\mu}$ описывает круг в плоскости xoy . Действительно

$$\mu_x^2 + \mu_y^2 = c_1^2 + c_2^2 = const.$$

где const. определяется из начальных условий: $|\vec{\mu}|^2 = c_1^2 + c_2^2$.

13.2. В теории парамагнитного резонанса обычно считают что образец находится в сильном постоянном магнитном поле \vec{H}_0 параллельном оси oz . В плоскости перпендикулярной \vec{H}_0 (в плоскости xoy) к образцу приложено высокочастотное поле \vec{H}_1 с круговой поляризацией. При вращении \vec{H}_1 по часовой стрелке компоненты вектора следующие:

$$H_x = H_1 \cos \nu t,$$

$$H_y = -H_1 \sin \nu t,$$

$$H_z = H_0.$$

Подставим их в уравнение Блоха, которое запишем для компонент:

38

$$\begin{aligned}\frac{dJ_x}{dt} &= \gamma(J_y H_0 + J_z H_1 \sin vt) - \frac{J_x}{T_2}, \\ \frac{dJ_y}{dt} &= \gamma(J_z H_1 \cos vt - J_x H_0) - \frac{J_y}{T_2}, \\ \frac{dJ_z}{dt} &= \gamma(-J_x H_1 \sin vt - J_y H_1 \cos vt) + \frac{J_0 - J_z}{T_1}.\end{aligned}$$

Согласно определению вектор намагниченности $\vec{J} = \chi \vec{H}$, где χ - магнитная восприимчивость, $\chi = \chi' - i\chi''$ - динамическая восприимчивость (χ_0 - статическая, когда $H = const.$).

Для определения χ' , χ'' надо решить уравнения Блоха. Введем переменные по u и v :

$$\begin{aligned}u &= J_x \cos vt - J_y \sin vt; \\ v &= -(J_x \sin vt + J_y \cos vt).\end{aligned}$$

Тогда $J_x = u \cos vt - v \sin vt$, $J_y = -(u \sin vt + v \cos vt)$ подставим в систему и приравняем нулю коэффициенты при $\sin vt$ и $\cos vt$.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + \frac{u}{T_2} + (\gamma H_0 - \nu)v &= 0, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{v}{T_2} - (\gamma H_0 - \nu)u &= -\gamma H_1 J_2, \\ \frac{dJ_z}{dt} + \frac{J_z}{T_1} - \gamma H_1 v &= \frac{J_0}{T_1}.\end{aligned}$$

Используем приближение медленного изменения магнитного поля \vec{H} , $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dJ_z}{dt} = 0$. После подстановки и исключения переменной u получаем:

$$v = -\frac{\gamma H_1 J_2 T_2}{1 + T_2^2 \delta \nu^2}, \text{ где } \delta \nu = \gamma H_0 - \nu = \nu_0 - \nu,$$

$$J_z = J_0 \frac{1 + T_2^2 \delta \nu^2}{1 + T_2^2 \delta \nu^2 + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2},$$

$$\nu = -\frac{\gamma H_1 J_0 T_2}{1 + T_2^2 \delta \nu^2 + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2},$$

$$u = -\nu T_2 \delta \nu = \frac{\gamma H_1 T_2^2 J_0 \delta \nu}{1 + T_2^2 \delta \nu^2 + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2},$$

$$J_x = \chi H_x = H_1 (\chi' \cos vt + \chi'' \sin vt),$$

$$J_y = \chi H_y = H_1 (\chi'' \cos vt - \chi' \sin vt).$$

Приравняем коэффициенты при $\sin vt$, $\cos vt$:

$$u = \chi' H_1, v = \chi'' H_1.$$

Отсюда

$$\chi' = \frac{\nu_0 T_2 (\nu_0 - \nu_2) \chi_0}{1 + T_2^2 (\nu_0 - \nu)^2 + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2},$$

а

$$\chi'' = \frac{\nu_0 T_2 \chi_0}{1 + T_2^2 (\nu_0 - \nu)^2 + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2}.$$

χ' - кривая дисперсии вещества, χ'' описывает поглощение в веществе и из формулы видно, что это контур лоренцевской кривой.

14. При ЯМР взаимодействует магнитный момент ядра с внешним H . Энергия взаимодействия $W = -(\vec{\mu}_I, \vec{H})$, где $\mu_I = I g_I \mu_N$.

В диамагнитных веществах где имеет место ЯМР, наведённый магнитный момент и H направлены навстречу друг друга. Расстояние между соседними магнитными подуровнями

$\Delta W = h\nu_0 = g_I \mu_N H$, откуда $\nu_0 = \frac{g_I \mu_N H}{h}$. g_I -ядерный g -фактор равен g_p протона и равен $g_p = 5.58$, для электрона g -фактор равен $g_e = 2$.

$$\text{Ядерный магнетон } \mu_N = \frac{eh}{4\pi m_p c} = \mu_0^B \frac{m_e}{m_p} \approx 5 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс.}$$

Электронный магнетон $\mu_0^B = \frac{eh}{4\pi m_e c}$. Отсюда для частоты получаем $\nu_0 = 4 \cdot 10^7 \text{ Гц} = 40 \text{ МГц}$.

В ЭПР $\nu_0 = 9 \text{ ГГц}$ для Cu^{2+} при $H \approx 5300 \text{ Э} = 5 \cdot 10^3 \text{ Гс}$, т.е. здесь эффект сильнее на порядок, что требует меньшее H поле.

15. Магнит имеет цилиндрическую форму

$$H = \frac{H_0 R^2}{a^2}.$$

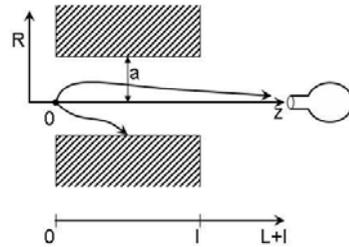
Из уравнения поля видно, что поле нарастает с удалением от оси магнита, а на оси z минимально. Градиент поля

$$\frac{dH}{dR} = \frac{2RH_0}{a^2}$$

направлен по R . Движение частицы в магнитном поле определяется наличием этого $\text{grad } H$ в радиальном направлении. Сила действующая на частицу

$$F_R = -\frac{\partial W}{\partial R} = \mu_{\text{eff}} \text{grad } H,$$

где $\mu_{\text{eff}} = -\frac{\partial W}{\partial H}$. Энергия W взаимодействия поля с частицей, обладающей магнитным моментом μ .



$$W = -\vec{\mu} \vec{H}$$

В магнитном поле уровни энергии атома водорода расщепляются. Для водорода $\vec{I} = 1/2$ (ядерный магнитный момент), $\vec{J} = 1/2$ (электронный магнитный момент). \vec{F} -полный момент количества движения равен $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J} = 1$. Тогда

$$\begin{cases} M_F = 0, \pm 1, & F = 1 \\ M_F = 0, & F = 0 \end{cases}$$

Атом водорода –электрически нейтральная частица: $e^- + e^+ = 0$, но обладает магнитным моментом.

Суть метода – пространственно разделить атомы, находящиеся на разных уровнях с помощью $\text{grad } H$. Уравнение движения атомов в магнитном поле:

$$m\ddot{R} = F_R = \mu_{\text{eff}} \text{grad } H.$$

Для частиц на верхнем рабочем уровне

$$W = +\mu H \text{ и } F_R = \mu_{\text{eff}} \frac{\partial H}{\partial R} = |\mu| \frac{2RH_0}{a^2}.$$

На нижнем уровне

$$W = -\mu H \text{ и } F_R = -|\mu| \frac{2RH_0}{a^2}.$$

Разбираем сортировку состояний $F = 1, M_F = 0$ (верхний уровень) и $F = 0, M_F = 0$ (нижний уровень) атомов водорода, здесь $|\mu| = |\mu_J - \mu_I|$.

Уравнение движение:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + k_1 R = 0 \quad (\text{для верхнего уровня}),$$

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - k_1 R = 0 \quad (\text{для нижнего}),$$

где

$$k_1 = \frac{2|\mu|H_0}{a^2}.$$

Решение ищем в виде:

$$R = A_1 e^{i\omega t} + B_1 e^{-i\omega t}$$

начальные условия:

$$t = 0, R = 0$$

(атом вылетает из источника на оси магнита, где $R = 0$),

$$\frac{dR}{dt} = v_R(0),$$

где $v_R(0)$ - начальная радиальная v .

Подставим решение в первое уравнение, где

$$\begin{aligned} \dot{R} &= i\omega(A_1 e^{i\omega t} - B_1 e^{-i\omega t}), \\ \ddot{R} &= -\omega^2(A_1 e^{i\omega t} + B_1 e^{-i\omega t}) = -\omega^2 R. \end{aligned}$$

Уравнение выполняется, если $k_1 = \omega^2$. Из начальных условий получаем коэффициенты A_1 и B_1 :

$$\begin{aligned} R(t=0) &= A_1 + B_1 = 0 \Rightarrow A_1 = -B_1 \\ v_R(0) &= \dot{R}(t=0) = i\sqrt{k_1} \cdot (A_1 - B_1) = i\sqrt{k_1} \cdot 2A_1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A_1 = -i \frac{v_R(0)}{2\sqrt{k_1}} = -B_1.$$

Следовательно, решение первого уравнения:

$$R = \frac{v_R(0)}{2\sqrt{k_1}} i(-e^{i\omega t}) + \frac{v_R(0)}{2\sqrt{k_1}} i(-e^{-i\omega t}) =$$

$$\frac{v_R(0)}{8\sqrt{k_1}} i(-2i) \sin \sqrt{k_1} t = \frac{v_R(0)}{\sqrt{k_1}} \sin \sqrt{k_1} t$$

Движение вдоль оси магнита (по oz) происходит по инерции, с постоянной скоростью. Отсюда

$$z = v_z t, \quad R = \frac{v_R(0)}{\sqrt{k_1}} \sin \sqrt{k_1} \frac{z}{v_z}.$$

Аналогично решая, получаем для нижнего уровня:

$$R = \frac{v_R(0)}{\sqrt{k_1}} \cdot \frac{\exp \sqrt{k_1} t - \exp(-\sqrt{k_1} t)}{2} = \frac{v_R(0)}{\sqrt{k_1}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{k_1}}{g_z} z$$

где

$$\omega = i\sqrt{k_1}.$$

Таким образом, атом на верхнем уровне пролетает магнит, совершая синусоидальные колебательные движения относительно оси магнита. Амплитуда движения тем больше, чем больше начальная радиальная скорость. Атом на нижнем уровне удаляется от оси магнита, затягиваясь в сторону сильного поля. В результате при пролете пучка атомов водорода через H происходит сортировка: из пучка удаляются атомы с $F = 0, M_F = 0$ и остаются атомы с $F = 1, M_F = 0$.

Частицы на выходе из магнита отстоят от его оси на величину

$$R_1(l) = \frac{v_R(0)}{\sqrt{k_1}} \sin \sqrt{k_1} \frac{l}{g_z},$$

скорость их

$$\dot{R}_1 = \left. \frac{\partial R}{\partial z} \right|_{z=l} = \frac{v_R(0)}{\sqrt{k_1}} \frac{\sqrt{k_1}}{v_z} \cos \sqrt{k_1} \frac{l}{g_z}.$$

После вылета из магнита частица летит прямолинейно и равномерно. На участке от $z=l$ по оси z уравнение движения имеет вид:

$$R_2 = R_1(l) + \left. \frac{\partial R_1}{\partial z} \right|_{z=l} \cdot (z-l) = \frac{v_R(0)}{\sqrt{k_1}} \left[\sin \frac{\sqrt{k_1}l}{v_z} + \frac{\sqrt{k_1}}{v_z} \cos \frac{\sqrt{k_1}l}{v_z} \cdot (z-l) \right]$$

Очевидно, что если $\left. \frac{\partial R_1}{\partial z} \right|_{z=l}$ - скорость на вылете из магнита меньше нуля, то через некоторое время пучок пересечет ось z (т. O'). Из условия $R_2(z) = 0$ (т. O'), т.е. при $z = L+l$

$$R_2(L+l) = \frac{v_R(0)}{\sqrt{k_1}} \left[\sin \frac{\sqrt{k_1}l}{v_z} + \frac{\sqrt{k_1}}{v_z} L \cos \frac{\sqrt{k_1}l}{v_z} \right] = 0$$

Откуда получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{k_1}l}{v_z} = -L \cdot \frac{\sqrt{k_1}}{v_z}.$$

В пучке атомы с наиболее вероятной скоростью v_z попадут в накопительную колбу

$$v_{\text{вероят.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Оценим угол:

$$\frac{\sqrt{k_1}l}{v_z} = \sqrt{\frac{2|\mu|H_0}{ma^2}} \cdot l \sqrt{\frac{m}{3kT}} = \sqrt{\frac{2|\mu|H_0}{3kT}} \cdot \frac{l}{a} = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 10^3}} \cdot 80 \approx \frac{80}{30} = 2 \text{ рад.}$$

Здесь $\frac{\sqrt{k_1}}{v_z} = 5 \cdot 10^{-2}$.

а) Отсюда для L получаем

$$L = -\frac{\operatorname{tg} \frac{\sqrt{k_1}l}{v_z}}{\frac{\sqrt{k_1}}{v_z}} = \frac{\operatorname{tg} 2}{5 \cdot 10^{-2}} = 45 \text{ см.}$$

б) См. рисунок.

16. Вращательная постоянная B выражается через момент инерции I молекулы:

$$B = \hbar / 4\pi I$$

а

$$I = mr^2,$$

где $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса m_1, m_2 - массы ядер Na и Cl,

r расстояние межъядерное. После подстановки можно получить

$$r = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi B m}}.$$

В выражение для приведённой массы подставим массовые числа $m_{Na} = 23$ и $m_{Cl} = 35$. Тогда

$$m = \frac{m_{Na} m_{Cl}}{m_{Na} + m_{Cl}} = \frac{23 \cdot 35}{23 + 35} m_p = \frac{23 \cdot 35}{23 + 35} \cdot 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 23.2 \cdot 10^{-24} \text{ г.}$$

$$I = \hbar / 4\pi B = \frac{6.67 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}^2}{8 \cdot (3.14)^2 \cdot 6.54 \cdot 10^9 \text{ Гц}} = 1.28 \cdot 10^{-38} \text{ г см}^2.$$

Отсюда

$$r = \sqrt{\frac{1.28 \cdot 10^{-38} \text{ г} \cdot \text{см}^2}{23.2 \cdot 10^{-24} \text{ г}}} = 2.4 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 2.4 \text{ \AA}$$

17. Энергия вращательного уровня $W(j)$ с определенным вращательным квантовым числом j :

$W(j) = hB j(j+1)$, а кратность вырождения уровней: $g_j = 2j+1$.
 Отношение числа частиц на уровнях i и j с учетом вырождения

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{g_i}{g_j} \exp\left[-\left(\frac{W_i - W_j}{kT}\right)\right].$$

Рассмотрим $i = 0, j = 0$:

$$g_1 = 3, g_0 = 1 \\ W_1 = hB \cdot 2; \quad W_0 = hB \cdot 0 = 0$$

$$\frac{W_1}{kT} = \frac{2 \cdot 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \cdot 5.8 \cdot 10^{14} \text{ Гц}}{300 \text{ К} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{К}} = 9 \cdot 10^{-3} = 0.9 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{N_1}{N_0} = \frac{3}{1} e^{-0.9 \cdot 10^{-2}} = \frac{3}{e^{0.01}} = \frac{3}{(2.7)^{0.01}} = 2.96 > 1$$

Таким образом, действительно $\frac{N_1}{N_0} = 2.96 > 1$. Однако, уси-

ление в такой системе невозможно, так как с учетом вырождения для усиления на переходе $j+1 \rightarrow j$ необходимо выполнение условия $\frac{N_{j+1}}{g_{j+1}} > \frac{N_j}{g_j}$, что здесь не соблюдается.

18. $\frac{N_2}{g_2} > (<) \frac{N_1}{g_1}$ условие усиления (поглощения).

Подставим значения:

$$\frac{10^{16}}{2} = \frac{0.5 \cdot 10^{16}}{2},$$

т.е. имеет место равенство $\frac{N_2}{g_2} = \frac{N_1}{g_1}$ - условие усиления или поглощения не выполняется. Определим температуру

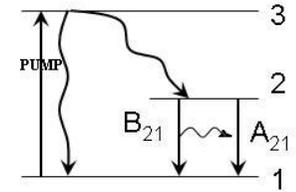
$$T_{21} = \frac{h\omega_{21}}{k} \left/ \ln \frac{N_1 \cdot g_2}{N_2 \cdot g_1} \right. = \frac{h\omega_{21}}{k} \left/ \ln 1 \right. = \infty.$$

Это неравновесное состояние, когда в системе нет ни усиления, ни поглощения. Это какое-то промежуточное состояние.

19. Рассмотрим трехуровневую квантовую систему.

а) В оптическом диапазоне выполняется условие $h\nu \ll kT$, при этом используются системы, когда один из возбужденных уровней обладает большим временем жизни τ . Система кинетических уравнений в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{N}_3 = p_{13}(N_1 - N_3) - \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_3}{\tau_{31}}, \\ \dot{N}_2 = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}}, \\ N_1 + N_2 + N_3 = N_0 \end{cases}$$



p_{13} - вероятность перехода частицы под воздействием поля накачки за 1 сек. \dot{N}_3, \dot{N}_2 - скорости изменения населённости уровней, $\tau_{21}, \tau_{32}, \tau_{31}$ - времена спонтанного перехода и релаксации между соответствующими уровнями.

Населенность 3-го уровня растет вследствие воздействия накачки на ν_{13} (1-е слагаемое) и уменьшается за счет релаксационных переходов. Равновесие наблюдается в системе, если

$$N_3 = N_1 e^{-\frac{h\nu_{31}}{kT}}, \quad N_3 = N_2 e^{-\frac{h\nu_{23}}{kT}}.$$

Если N_3 отличается от равновесных значений, в системе происходят процессы релаксации с постоянными времени τ_{31}, τ_{23} . В случае $h\nu \gg kT$ экспоненциальные члены можно считать рав-

ными нуля и скоростные уравнения имеют вид выше. Для установившегося режима $\dot{N}_3 = \dot{N}_2 = 0$ из системы получаем

$$N_2 - N_1 = N_0 \frac{p_{13}\tau_{31}(\tau_{21} - \tau_{32}) - \tau_{31} - \tau_{32}}{p_{13}\tau_{31}(\tau_{21} + 2\tau_{32}) + \tau_{31} + \tau_{32}}.$$

Чтобы $N_2 \geq N_1$ имело место, p_{13} должен удовлетворять условию:

$$p_{13}\tau_{31}(\tau_{21} - \tau_{32}) \geq \tau_{31} + \tau_{32}.$$

Отсюда

$$p_{13} \geq \frac{\tau_{31} + \tau_{32}}{\tau_{31}(\tau_{21} - \tau_{32})} = \frac{1}{\tau_{21} - \tau_{32}} \left(1 + \frac{\tau_{32}}{\tau_{31}} \right).$$

Принципиально инверсия $2 \rightarrow 1$ возможна, если $\tau_{21} > \tau_{32}$, т.е. $p_{13} > 0$ по смыслу вероятности.

б, в) Согласно условию: $\tau_{32} = 10^{-6} \div 10^{-7}$ с, а $\tau_{31} = 10^{-3}$ с – метастабильный уровень, т.е. $\tau_{21} > \tau_{32}$.

Наиболее выгодные соотношения между τ_{32} и τ_{31} с точки зрения минимума накачки p_{13} :

$$\tau_{31} \gg \tau_{32}.$$

Частицы, переведенные на третий уровень, преимущественно переходят на второй уровень и в меньшей мере на первый уровень. При этих условиях: $(p_{13})_{\min} = 1/\tau_{21}$; $N_3 \ll N_1, N_2$. Поэтому при инверсии $2 \rightarrow 1$ можно считать: $N_3 \approx 0, N_2 \approx N_1 \approx N_0/2$. Для минимальной мощности накачки имеем

$$P_{\min, pump} = h\nu_{13} p_{13, \min} (N_1 - N_3) \approx \frac{N_0 h\nu_{13}}{2\tau_{21}}.$$

Система накачки должна компенсировать значительное число спонтанных переходов $N_0/2\tau_{21}$ в секунду – это недостаток трехуровневой системы.

20. В случае четырехуровневой системы четвертый уровень располагают между вторым и первым уровнями трехуровневой системы (см. рис.). В этом случае целесообразно, чтобы $\tau_{32} \ll \tau_{31}, \tau_{34}, \tau_{21} \gg \tau_{24}$, чтобы частицы не стекали на первый уровень, уменьшая инверсию.

В равновесном состоянии $N_3 \approx N_2 \approx 0$. N_4 хоть и мала, но

$$\gg N_3 \text{ и } N_2. N_4 = N_1 e^{-\frac{h\nu_{41}}{kT}}.$$

Система кинетических уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{N}_3 = p_{13}(N_1 - N_3) - \frac{N_3}{\tau_{32}}, \\ \dot{N}_2 = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{24}}, \\ \dot{N}_4 = \frac{N_2}{\tau_{24}} - \frac{1}{\tau_{24}}(N_4 - N_1 e^{-\frac{h\nu_{41}}{kT}}) \\ N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N_0 \end{cases}$$

Для стационарного состояния: $\dot{N}_3 = \dot{N}_2 = \dot{N}_4 = 0$ Определим разность

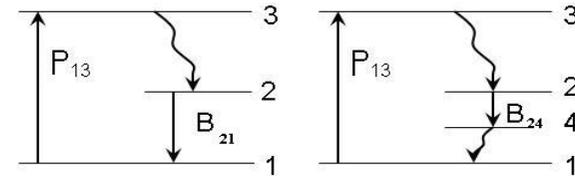
$$N_2 - N_4 \geq 0.$$

Откуда получаем

$$p_{13}\tau_{24}N_0 > \tau_{41}p_{13}N_0 + N_0 e^{-\frac{h\nu_{41}}{kT}}$$

или

$$p_{13} \geq \frac{1}{\tau_{24} - \tau_{41}} e^{-\frac{h\nu_{41}}{kT}} \sim \frac{1}{\tau_{24}} e^{-\frac{h\nu_{41}}{kT}}.$$



При условии $\tau_{24} > \tau_{41}$ минимальная мощность накачки определяется как

$$\left. \begin{aligned} P_{\min, pump} &= h\nu_{13} p_{13} (N_1 - N_3) \approx \frac{N_0}{\tau_{24}} h\nu_{13} e^{-\frac{h\nu_{41}}{kT}} \\ \frac{h\nu_{41}}{kT} &> (2+3)kT \Rightarrow \\ N_1 &\gg N_2, N_3, N_4 \end{aligned} \right\} \frac{P_{\min, pump}^{(4)}}{P_{\min, pump}^{(3)}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{h\nu_{41}}{kT}}.$$

Здесь $\tau_{24} \sim \tau_{21}$.

Выигрыш в мощности растёт, если $h\nu_{41} > kT(3+5)$, т.е. если четвёртый уровень достаточно удален от первого. На практике выигрыш составляет 10^{2+3} раз.

Принципиальный выигрыш связан с тем, что в четырехуровневой системе нижний уровень не является основным и при отсутствии накачки он практически пустой и не нужно мощного сигнала накачки для уравнивания населённостей. В трехуровневой системе в равновесном состоянии нижний уровень, будучи основным, всегда заселён.

21. Трехуровневая система. В СВЧ-диапазоне $kT > h\nu_{32,21}$ энергия теплового движения больше энергии кванта. Система кинетических уравнений:

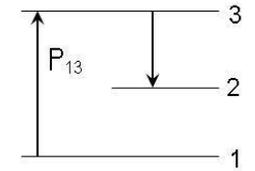
$$\begin{cases} \dot{N}_3 = -p_{13}(N_1 - N_3) + \frac{1}{\tau_{21}}(N_2 - N_1 e^{-\frac{h\nu_{21}}{kT}}) + \frac{1}{\tau_{31}}(N_3 - N_1 e^{-\frac{h\nu_{31}}{kT}}), \\ \dot{N}_2 = \frac{1}{\tau_{32}}(N_3 - N_2 e^{-\frac{h\nu_{32}}{kT}}) - \frac{1}{\tau_{21}}(N_2 - N_1 e^{-\frac{h\nu_{21}}{kT}}), \\ N_1 + N_2 + N_3 = N_0 \end{cases}$$

В стационарном режиме $\dot{N}_1 = \dot{N}_2 = \dot{N}_3 = 0$; $N_1 = N_3$, так как в переходе $1 \rightarrow 3$ наступило насыщение. Тогда имеем:

$$\frac{N_3}{N_2} = \frac{\tau_{32} + \tau_{21} e^{-\frac{h\nu_{32}}{kT}}}{\tau_{21} + \tau_{32} e^{-\frac{h\nu_{21}}{kT}}}.$$

Для $N_3 \geq N_2$ и в радиодиапазоне $e^{-\frac{h\nu_{32}}{kT}} = 1 - e^{-\frac{h\nu_{32}}{kT}}$. Тогда

$$\frac{\tau_{32} + \tau_{21} e^{-\frac{h\nu_{32}}{kT}}}{\tau_{21} + \tau_{32} e^{-\frac{h\nu_{21}}{kT}}} > 1 \Rightarrow \frac{\tau_{32} \nu_{21}}{\tau_{21} \nu_{32}} > 1.$$



Для инверсии в качестве рабочего перехода следует выбрать либо переход с $\nu_{32} \ll \nu_{21}$ или $\tau_{32} \gg \tau_{21}$.

В дециметровом диапазоне (частота ν мала) целесообразно осуществить выполнение условия: $\nu_{32} \ll \nu_{21}$.

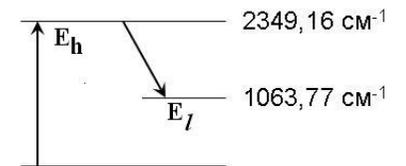
В сантиметровом и миллиметровом это условие технически сложно выполнить, поэтому там целесообразно осуществить выполнение условия: $\tau_{32} \gg \tau_{21}$.

Выбирают квантовые системы, чтобы при невысокой частоте накачки имело место

$$\frac{\tau_{32} \nu_{21}}{\tau_{21} \nu_{32}} > 1.$$

В оптическом диапазоне создать инверсию $3 \rightarrow 2$ сложно, так как для насыщения $1 \rightarrow 3$ необходима большая мощность P_{13} на 10^{4+5} больше, чем в сантиметровом диапазоне. $h\nu_{13, optics} / h\nu_{13, sm} = 10^4 \div 10^5$ а

$$P_{13} \sim h\nu_{13}.$$

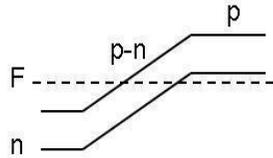


22. а) В CO₂ лазере генерация идет на колебательно – вращательных переходах 00¹–10⁰ (λ = 10,6 мкм).

$$\eta = \frac{E_h - E_l}{E_h} = \frac{h \frac{c}{\lambda}}{E_h} = \frac{(2349.16 - 1285.4) \text{ см}^{-1}}{2349.16 \text{ см}^{-1}} \approx 0.4 = 40\%,$$

$$\lambda = \frac{ch}{E_h - E_l} = \frac{1}{1063.77 \text{ см}^{-1}} \approx 9.40 \text{ мкм}.$$

б) в полупроводниковом инжекционном лазере с *p-n* переходом (например, GaAs) для создания инверсии к *p-n* переходу прикладывается в (прямом направлении) *U*, определяемое шириной *E_g* (~1*B*). В результате протекания тока термодинамическое равновесие нарушается и уровень *F* расщепляется на два: для *e* в полупроводнике *n*-типа и *p* в полупроводнике *p*-типа.



$$\eta = \frac{h\nu}{U} = \frac{h\nu}{\sim \Delta E_g} = \frac{\sim \Delta E_g}{\sim \Delta E_g} \sim 1.$$

Теоретически η = 100% (недостаток полупроводниковых лазеров - малая мощность, из-за малой толщины *p-n* перехода, что объясняется технологической трудностью получения оптически однородного *p-n* перехода).

в) He-Ne лазер: λ = 0.63 мкм, λ = 3.39 мкм.

$$\eta_{0.63} = \frac{20.662 - 18.704}{20.662} = 0.1 = 10\%,$$

$$\eta_{3.39} = \frac{20.662 - 20.368}{20.662} = 0.014 = 1.4\%,$$

$$\eta_{He+\bar{e}=e+He^*} = e^{-\frac{E^*}{kT_e}} = e^{-\frac{20 \text{ эВ}}{7 \text{ эВ}}} = 0.05\%.$$

Учитывая, что средняя энергия электрона *e* в разряде ≈ 7эВ, определим к.п.д. лазера

$$\Sigma \eta_{0.63} = \eta_{0.63} = 0.1 \cdot 0.05 = 0.005 = 0.5\%,$$

$$\eta_{\text{экс}} = \frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{разр}}} = \frac{0.1 \text{ Вт}}{20 \text{ мА} \cdot 1 \text{ кВ}} = 0.005 = 0.5\%.$$

23. Интенсивность волны изменяется с *x* по закону: $I = I_0 e^{(\alpha - \beta)x}$. Интенсивность волны, совершающей в резонаторе полное прохождение, преобразуется к виду: $I_0 e^{(\alpha - \beta)2L} r_1 r_2$. При оценке величин усиления и потерь мощности удобно относить их к одному прохождению излучения через резонатор. Для возникновения генерации необходимо, чтобы интенсивность волны, совершивший обход резонатора была ≥ интенсивности первоначальной *I₀*.

$$I_0 e^{2L(\alpha - \beta)} r_1 r_2 \geq I_0,$$

$$2L(\alpha - \beta) \geq \ln \frac{1}{r_1 r_2} = -\ln r_1 r_2,$$

$$(\alpha - \beta) \geq -\frac{1}{2L} \ln r_1 r_2.$$

Отсюда для порогового условия генерации получаем

$$\alpha \geq \beta - \frac{1}{2L} \ln r_1 r_2.$$

Пороговой коэффициент усиления в лазере:

$$\alpha_{\text{см}} = \beta - \frac{1}{2L} \ln r_1 r_2.$$

Если индуцированное усиление (α) в активной среде компенсирует все потери в резонаторе, то в ОКГ будет суще-

ствовать генерация. Для непрерывного генерирования усиление в активной среде должно иметь стационарное значение α_{cm} .

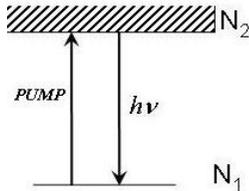
$$\alpha_{cm} \sim N_{2,thresh.}, \text{ так как } \sim \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) = \Delta N.$$

Если $N_2 > N_{2,thresh.}$, то в ОКГ происходит нарастание интенсивности до тех пор, пока за счет индуцированных переходов N_2 не снизится до $N_{2,thresh.}$, когда имеет место стационарный режим.

При $N_2 < N_{2,пор.}$ колебания в ОКГ затухают.

24. Инверсия наступает, когда на верхнем уровне более половины активных частиц. Пороговое условие накачки выполняется при $N_2 = \frac{N_0}{2}$. Для того чтобы перевести одну частицу на верхний уровень, необходима энергия накачка равная $h\nu$, а половину частиц всего кристалла - $h\nu \cdot \frac{N_0}{2} = h\nu \cdot \frac{nV}{2}$. Таким образом, энергия накачки $h\nu \cdot \frac{nV}{2}$, но она для осуществления инверсии должна перевести вверх $\frac{N_0}{2}$ частиц за $t \leq \tau_{sp}$.

Отсюда,



$$P_{\min,pump} = \frac{h\nu \frac{nV}{2}}{\tau_{cm}} = \frac{6.626 \cdot 10^{-27} \cdot \frac{3 \cdot 10^{10}}{0.5 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{nV}{2}}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^{-13} \cdot 36 \text{ эрг}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ с}} \cdot \frac{10^{19} \text{ см} \cdot 10}{2} = 6 \cdot 10^{10} \frac{\text{эрг}}{\text{с}} = 6 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 6 \text{ кВт}.$$

25. Если потери в среде отсутствуют ($\beta = 0$), тогда коэффициент усиления

$$\alpha_{thresh.} = -\frac{1}{2L} \ln r_1 r_2,$$

$$\alpha_{thresh.} = -\frac{1}{2 \cdot 10 \text{ см}} \ln \frac{1}{1 \cdot 0.9} = \frac{1}{20 \text{ см}} \cdot \ln \frac{10}{9} = 0.005 \text{ см}^{-1},$$

$$L = \frac{\ln \frac{1}{r_1 r_2}}{2\alpha_{thresh.}} = 0.17 \text{ см}.$$

26. Оценим $P_{\min,pump}$, необходимую для создания порогового уровня инверсной населённости

$$\Delta n = n_E - n_{A_2} \cdot \frac{g_E}{g_{A_2}} > 0,$$

$$n_E > \frac{1}{2} n_{A_2},$$

так как $n_{A_2} \approx n$ (4A_2 -основное состояние Cr^{3+}).

$$n_E > 0.5n, \quad \Delta n = 0.5n,$$

$$U_{13} = P_{\min, pump} t = \frac{h\nu_{pump} \cdot \Delta n \cdot V}{\eta} = 50 \text{ Дж} \text{ - энергия, необходимая}$$

для создания инверсии, небольшая по величине, но важна скорость накачки ($B_{13}h\omega_{13}$) равная энергии $\times B_{13}$. Время t будет определяться τ_{21} -временем жизни верхнего лазерного уровня

$$\frac{U_{13}}{\tau_{21}} = P_{\min, pump} = \frac{h\nu_{pump} \cdot \Delta n \cdot V}{\tau_{21}} = U_{13} \cdot A_{21}.$$

$B_{13}h\nu_{13} = 5A_{21}$ -минимальное требование для поддержания инверсии Δn на рабочих уровнях. Коэффициент 5 связан с потерями.

$$\begin{aligned} P_{pump} &= 5A_{21}h\nu_{pump}\Delta nV = \\ &= 300 \text{ с}^{-1} \cdot 4.2 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} \cdot 0.5 \cdot 1.6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3} \cdot 10 \text{ см}^3 \\ &= 7.5 \text{ кВт}. \end{aligned}$$

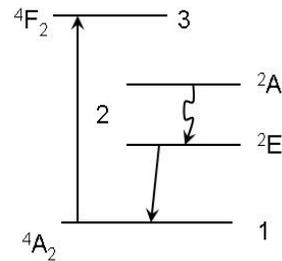
$$P_{gener.} = P_{pump} - P_{luminescence}$$

$$P_{luminescence} = h\nu_{R_1} A_{21} n_E V = 2.9 \cdot 10^{-12} \cdot 300 \cdot 0.466 \cdot 10^{19} \cdot 10 = 4.5 \text{ кВт}$$

$$P_{gen.} = 3 \text{ кВт}.$$

В действительности P_{pump} больше из-за потерь в резонаторе: из-за поглощения приходится увеличивать накачку до величины $B_{13}h\omega_{13} = 10A_{21}$ и больше.

27. Верхний уровень 2E “подпитывается” с уровня 2A . Можно считать оба уровня как единый со статистическим весом $g_2 = 2$. Нижнее (основное) состояние 4A_2 содержит 4 уровня, $g_1 = 4$. Накопление на 2E возможно благодаря



большому τ_{21} . Процесс накопления происходит до тех пор, пока N_2 не превысит пороговую населённость. Условие генерации

$$N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \geq 0. \text{ Учитывая, что } N_1 + N_2 \approx N_0, \text{ получаем } N_{2nop.}$$

$$N_{2nop.} - N_1 \frac{g_2}{g_1} = N_2 - (N_0 - N_2) \frac{g_2}{g_1} = N_{2nop.} \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right) - N_0 \frac{g_2}{g_1} \geq 0$$

$$N_{2nop.} \geq \frac{N_0 \frac{g_2}{g_1}}{1 + \frac{g_2}{g_1}} = \frac{N_0}{1 + \frac{g_2}{g_1}} = \frac{N_0}{3}$$

$$(g_1 = 4, g_2 = 2)$$

В режиме генерирования в ОКГ на рубине на втором уровне должно находиться не менее трети всех активных частиц. С увеличением потерь в резонаторе для достижения порога генерации необходимо перевести на второй уровень большее число частиц. Минимальная величина энергии, которая должна быть поглощена рубином для достижения генерации $W_{\min, pump} \geq N_0 h\nu_{13} / 3$. При концентрации иона Cr^{+3} равной 0,05% плотность частиц $N_0 = 1.6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Считая $\lambda_{pump} = 0.56 \text{ мкм}$, получаем для мощности накачки $W_{\min, pump} \geq 2 \text{ Дж} / \text{см}^3$.

28. Если амплитуда колебаний в резонаторе - A , то энергия U типа колебаний в резонаторе пропорциональна $\sim A^2$, т.е.

$$U = A^2 = A_0^2 e^{-\frac{\omega}{Q}t},$$

где A_0^2 -энергия типа колебаний в начальный момент $t = 0$, Q - добротность резонатора. Отсюда

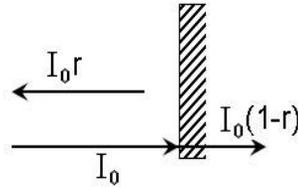
$$U = U_0 e^{-\frac{\omega}{Q}t}$$

где $\omega/2\pi$ - частота перехода.

Тогда энергия, теряемая за промежуток времени dt , определяется выражением

$$dU = -\frac{\omega}{Q}Udt$$

Каждая стоячая волна образует свой тип колебаний и её можно представить в виде суммы двух бегущих навстречу друг друга волн, причем энергия каждой бегущей волны равна $U/2$.



Рассмотрим какие потери встречаются в резонаторе. Допустим в среде есть поглощение. Из-за рассеяния в среде, т.е. нерезонансного поглощения, потери на проход для бегущей волны составляют:

$$\Delta U' = \frac{U}{2}e^{-\beta L} - \frac{U}{2} = \frac{U}{2}[1 - \beta L - 1] = -\frac{U}{2}\beta L,$$

где для случая малых потерь в среде использовали разложение $e^{-\beta L} = 1 - \beta L$.

Потери для этой же волны за счет пропуска зеркал равны

$$\Delta U'' = -\frac{U}{2}(1 - r).$$

Полные потери за проход резонатора, т.е. за время $t = \frac{L}{c}$,

будут равны:

$$\Delta U = \Delta U' + \Delta U''$$

В среднем энергия, теряемая бегущей волной в единицу t , равна:

$$\frac{\Delta U c}{L} = \frac{c}{L} \left[-\frac{U}{2}\beta L - \frac{U}{2}(1-r) \right] = -\frac{Uc}{2L} [\beta L + (1-r)].$$

Энергия, теряемая стоячей волной за время dt определяется выражением

$$2 \frac{\Delta U c}{L} dt = -\frac{Uc}{L} [\beta L + (1-r)] dt.$$

Но это по своему смыслу есть выражение $dU = -\frac{\omega}{Q}Udt$.

$$dU = -\frac{\omega}{Q}Udt = -\frac{Uc}{L} [\beta L + (1-r)] dt.$$

Отсюда для добротности резонатора получаем

$$Q = \frac{\omega L}{c [\beta L + (1-r)]}.$$

Из полученного выражения можно определить время затуханий

$\tau_r = \frac{Q}{\omega}$, т.е. время жизни колебаний или фотона в резонаторе.

Подставим значения параметров:

$$Q = \frac{2\pi\nu L}{c [\beta L + (1-r)]} = \frac{2\pi n L}{\lambda [\beta L + (1-r)]} = \frac{6.28 \cdot 100 \text{ см}}{0.6 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-5} \cdot (0.001 \text{ см}^{-1} \cdot 100 \text{ см} + 0.05)} \approx \frac{10^7}{0.15} = \frac{10^7}{0.2} = 7 \cdot 10^7,$$

$$\tau_r = \frac{7 \cdot 10^7 \cdot 0.6 \cdot 10^{-4} \text{ см}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см}} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ с}.$$

29. Известно, что собственные частоты пустого резонатора (без активной среды) определяются выражением:

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} \left[q + \frac{m+n}{\pi} \arccos \sqrt{g_1 g_2} \right],$$

где m, n, q - целые числа, а $g_{1,2} = 1 - L/R_{1,2}$. Преобразуем данное выражение

$$v_{mnq} - \frac{c}{2L}q = \frac{c}{2L} \cdot \frac{m+n}{\pi} \arccos \sqrt{g_1 g_2}$$

Для продольных типов колебаний, для которых выполняется условие

$$m = n = 0, v_{00q} = \frac{c}{2L}q.$$

Поэтому для них правая часть уравнения равна нулю.

При $q = 0$ уравнение принимает вид

$$v_{mn} - v_{00} = \frac{c}{2L} \cdot \frac{m+n}{\pi} \arccos \sqrt{g_1 g_2}.$$

а) При $m = 0, n = 1$ имеем

$$v_{01} - v_{00} = \frac{c}{2L} \cdot \frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{g_1 g_2}.$$

Подставим численные значения параметров задачи: $R_1 = \infty, g_1 = 1, R_2 = 100 \text{ см}$. Определим

$$g_2 = 1 - \frac{50}{100} = 0.5.$$

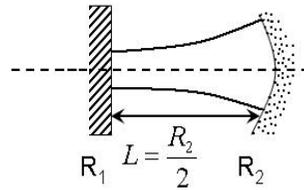
Таким образом оценка для пустого резонатора даёт

$$v_{01} - v_{00} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{250 \text{ см}} \cdot \frac{1}{3.14} \arccos \sqrt{0.5} = 74.5 \text{ МГц}.$$

б) Согласно значений параметров задачи, $L = R_2/2, R_1 = \infty$ рассматриваемый тип резонатора - полуконфокальный.

с) См. рисунок.

30. Число Френеля $N = a^2/\lambda L$ в этом случае равно



$$N = \frac{(0.5)^2}{0.63 \cdot 10^{-4} \cdot 100} = 39.8.$$

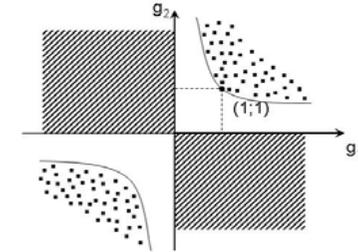
Для $N > 10$ для дифракционных потерь на один проход α_{mn} выполняется соотношение

$$\alpha_{mn} = 5.23 \cdot 10^{-2} \lambda_n^{m+1} N^{-\frac{3}{2}},$$

где λ_n^{m+1} - $(m+1)$ -ый корень функции Бесселя первого рода первого n -го порядка. При $m = 0, n = 0, \lambda_0^1 = 2.40$, а при $m = 0, n = 1, \lambda_1^1 = 3.83$. Отсюда

$$\alpha_{00} = 5.23 \cdot 10^{-2} \cdot 2.40 \cdot (-39.8)^{-\frac{3}{2}} = 1.2 \cdot 10^{-3} = 0.12\%,$$

$$\alpha_{01} = 5.23 \cdot 10^{-2} \cdot 3.83 \cdot (-39.8)^{-\frac{3}{2}} = 3.1 \cdot 10^{-3} = 0.31\%.$$



Таким образом, дифракционные потери на один проход для основной моды TEM_{00} почти 2,5 раза меньше, чем для поперечной моды первого порядка TEM_{01} . На g -диаграмме такому плоскопараллельному резонатору соответствует точка (1;1), так как $g_1 = g_2 = 1$. Небольшая разъюстировка зеркал такого резонатора ведет к прерыванию генерации, так как при этом резко возрастают потери (штриховые и точечные области на рисунке соответствуют большим потерям).

31. Пусть I - интенсивность бегущей волны в резонаторе. Тогда $P_{output} = T \cdot I$, где T - коэффициент пропускания зеркала. В ла-

зере, как известно, $\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + I/I_0}$, где α_0 - это ненасыщенное уси-

ление за проход резонатора. Из-за эффекта насыщения усиление падает и определяется соотношением приведённым выше

выражением. При генерации наступает стационарный режим, т.е. потери равны усилению:

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{I}{I_0}} = \beta + \frac{T_r}{L},$$

где потери складываются из потерь на проход среды и потерь на зеркалах за один проход (замечание - за проход излучение один раз выходит из резонатора). Из уравнения получаем

$$1 + I/I_0 = \frac{\alpha_0}{\beta + \frac{T_r}{L}}.$$

Откуда

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\alpha_0}{\beta + \frac{T_r}{L}} - 1 = \frac{\alpha_0 - \beta - \frac{T_r}{L}}{\beta + \frac{T_r}{L}} = \frac{\alpha_0 - \beta - \alpha_m}{\beta + \alpha_m},$$

где $\alpha_m = T_m / L$.

В результате $I = I_0 \left(-1 + \frac{\alpha_0}{\beta + \frac{T_r}{L}} \right)$ и для выходной мощности по-

лучаем искомое выражение

$$P_{\text{output}} = TI_0 \left(\frac{\alpha_0}{\beta + \alpha_m} - 1 \right) = I_0 L \alpha_m \left(\frac{\alpha_0}{\beta + \alpha_m} - 1 \right).$$

Выражение для T_{opt} найдем из условия нахождения экстремума,

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_m} = 0.$$

$$\begin{aligned} T_{\text{opt}} &= L \alpha_{m,\text{opt}} = L \left(\sqrt{\alpha_0 \beta} - \beta \right) = \\ &= 10 \left(\sqrt{0.001} - 0.01 \right) = (0.033 - 0.01) \cdot 10 = 0.023 \cdot 10 = 23\% \end{aligned}$$

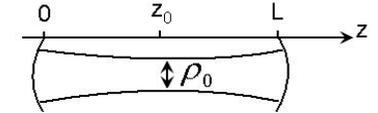
32. Известно, что угол расхождения θ пучка равняется

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0},$$

где w_0 - минимальный поперечный размер пучка, так

называемая перетяжка пучка (см. рис.), которая определяется следующим выражением

$$w_0^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right) \frac{L}{2} \quad \text{или} \quad w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi}}.$$



Координату перетяжки вдоль оси резонатора обозначим z_0 и она равняется $z_0 = L/2$. Отсюда для угла расхождения основного типа колебаний конфокального резонатора получаем

$$\theta = \sqrt{\frac{2\lambda}{L\pi}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4} \text{ см}}{200 \text{ см} \cdot 3.14}} \approx 5.6 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 1.9'.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Постоянная Планка $h = 6.626 \cdot 10^{-27}$ эрг \cdot с = $6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж \cdot с

Скорость света в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с = $3 \cdot 10^8$ м/с

Постоянная Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град =
= $1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

Электрическая постоянная $\epsilon_0 \approx 0.885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Масса протона $m_p = 1.672 \cdot 10^{-24}$ г = $1.672 \cdot 10^{-27}$ кг

Масса электрона $m_e = 0.911 \cdot 10^{-27}$ г = $0.911 \cdot 10^{-30}$ кг

Магнетон Бора $\mu_B = 0.927 \cdot 10^{-20}$ эрг/Гс = $0.927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл

Ядерный магнетон $\mu_N = 5.051 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс = $5.051 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл

Литература

1. Ф. Качмарек “Введение в физику лазеров”, М., Мир, 1981, 386с.
2. А. Мэйтленд, М. Данн “Введение в физику лазеров”, М., Наука, 1978, 408с.
3. О. Звелто “Физика лазеров”, М., Мир, 1984, 396с.
4. Л.В. Тарасов “Физические основы квантовой электроники”, М., 1976, 368с.
5. А. Ярив “Квантовая электроника”, М, Советское радио, 1980, 488с.
6. Я.И. Ханин “Динамика квантовых генераторов,” М., Советское радио, 1975, 496с.
7. Р. Пантел, Г. Путхоф Основы квантовой электроники, М., Мир, 1972, 384с.
8. А.В. Успенский “Сборник задач по квантовой электронике”, М., Высшая школа, 1976, 176с.
9. Р.Б. Гасимова, Р.Я. Кярямялийев “Квант электроники сынын яаслары”, Баку, БДУ, 1991, 79сящ.
10. Г. Бейтмен, А. Эрдейи “Высшие трансцендентные функции,” М., Наука, 1973, 294с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ЗАДАЧИ.....	5
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ	19
ПРИЛОЖЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ.....	65
ЛИТЕРАТУРА.....	66
ОГЛАВЛЕНИЕ.....	67

Компьютерное оформление:

Керимов Б.А.,
Керимов Э.А.

Подписано в печать: 18.02.2008.

Формат 60x84 1/16

Объем 4.25 п.л. Тираж 200.

Издательство «Баки Университети»
370602. Баку, ул. З.Халилова 23.